

Я.И.ПЕРЕЛЬМАН

Занимательная
АРИТМЕТИКА



Я.И.ПЕРЕЛЬМАН

**Занимательная
АРИФМЕТИКА**

**ЗАГАДКИ И ДИКОВИНКИ
В МИРЕ ЧИСЕЛ**

ИЗДАНИЕ ДЕВЯТОЕ
с дополнениями А. З. РЫВКИНА



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1959

11-2-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

От издательства.	6
--------------------------	---

Глава первая

Старое и новое о числах и нумерации

Самая распространенная письменная нумерация.	7
Древняя египетская нумерация.	10
Старинная народная нумерация.	11
Римская нумерация.	13
Древняя греческая нумерация.	15
Славянская нумерация.	17
Вавилонская нумерация.	18
Секретные торговые «меты».	20
Пешки вместо цифр.	21
Арифметика за завтраком.	24
Арифметические ребусы.	27
Найти трехзначное число.	29
Десятичная система в книжных шкафах.	30
Арифметические знаки и названия у разных народов.	32

Глава вторая

Древний абак и его потомки

Чеховская головоломка.	35
Как считали в глубокой древности.	39
Русские счеты.	44
Умножение на счетах.	45
Деление на счетах.	46
Отголоски старины.	47

Глава третья

Немного истории

«Трудное дело — деление».	50
Хорошо ли мы множим?.	58
«Русский» способ умножения.	58
Из страны пирамид.	60

Глава четвертая

Недесятичные системы счисления

Загадочная автобиография.	65
Простейшая система счисления.	68
Необычайная арифметика.	70
Чет или нечет?.	74
Поучительные задачи.	75
Дроби без знаменателя.	76

Глава пятая

Галерея числовых диковинок

Арифметическая кунсткамера.	78
Число 12.	80
Число 365.	82
Три девятки.	84
Число Шехеразады.	85
Число 10 101.	87
Число 10 001.	88
Шесть единиц.	89
Числовые пирамиды.	90
Девять одинаковых цифр.	93
Цифровая лестница.	94
Магические кольца.	96
Феноменальная семья.	100

Глава шестая

Фокусы без обмана

Искусство индийского счетчика.	104
Не открывая кошельков.	105
Угадать число спичек.	108
«Чтение мыслей» по спичкам.	110
Идеальный разновес.	112
Предсказать сумму ненаписанных чисел.	115
Мнимая неожиданность.	118
Мгновенное деление.	119
Любимая цифра.	120
Угадать дату рождения.	121
Одно из «утешных действий» Магницкого.	123
Отгадывание чисел.	124

Глава седьмая

Быстрый счет

Действительные и мнимые феномены.	126
Запоминание чисел.	127
«Сколько мне дней?».	130
«Сколько мне секунд?».	131
Приемы ускоренного умножения.	131
Для обиходных расчетов.	133

Глава восьмая

Приближенные вычисления

Математические загадки пирамиды Хеопса.	137
Приближенные числа.	142
Округление чисел.	145
Цифры значащие и незначащие.	146
Сложение и вычитание приближенных чисел.	146
Умножение, деление и возвышение в степень приближенных чисел	147
Применение на практике.	148
Сбережение счетного труда.	149

Глава девятая

Числовые великаны

Числовые великаны нашей действительности.	151
Как велик миллион?.	153
Миллион на шестеренках.	154
Миллион секунд.	155
Полоса из миллиона волос.	156
Упражнения с миллионом.	157
Названия числовых великанов.	159
Миллиард.	161
План-великан.	162
Триллион.	165
Числа-сверхгиганты.	166
Пожиратели числовых исполинов.	168
Исполины времени.	170

Глава десятая

Числовые лилипуты

От великанов к карликам.	172
Лилипуты времени.	173
Лилипуты пространства.	175
Сверхисполин и сверхлилипут.	177

Глава одиннадцатая

Арифметические путешествия

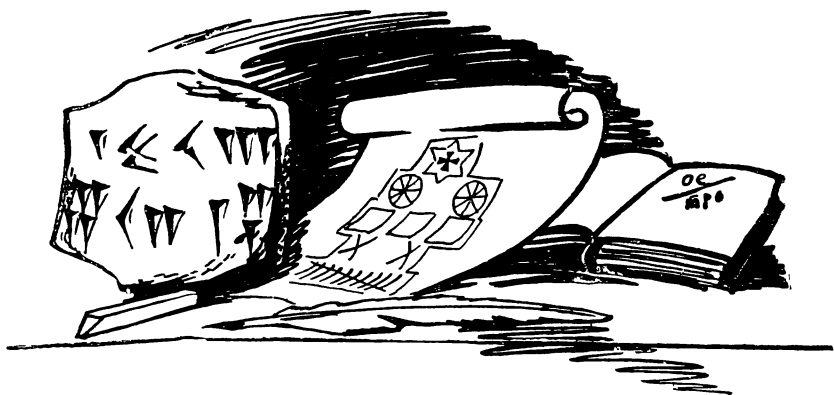
Ваше кругосветное путешествие.	183
Ваше восхождение на Монблан.	185
Незаметное путешествие на дно океана.	187
Трактор вокруг света.	188
Неутомимое колесико.	188
Путешествующие, стоя на месте	190
О т в е т ы	191

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Книга Я. И. Перельмана «Занимательная арифметика» выдержала при жизни автора семь изданий и была переработана и дополнена им в седьмом издании, вышедшем в Ленинграде в 1938 г.

В течение последующих 16 лет эта книга не переиздавалась, и только в 1954 г. Государственное издательство детской литературы выпустило восьмое, сокращенное издание.

В настоящем, девятом, издании подверглись значительной переработке главы первая, вторая и девятая. Эти главы дополнены новым материалом: рассказано более подробно о различных системах счисления, о том, как считали на китайском абаке, о числовых великанах нашей действительности и особенно о числовых великанах грандиозного семилетнего плана на 1959—1965 гг. — плана построения коммунизма в нашей стране. По-новому рассказано о названиях числовых великанов.



І Ѕ Ÿ ІV Г Т W Z ʹ Ƨ

ГЛАВА ПЕРВАЯ

СТАРОЕ И НОВОЕ О ЧИСЛАХ И НУМЕРАЦИИ

САМАЯ РАСПРОСТРАНЕННАЯ ПИСЬМЕННАЯ НУМЕРАЦИЯ

Для любого из вас — читателей этой книги — не представит большого труда написать какое-нибудь целое число, например в пределах до одного миллиона. Для записи чисел мы пользуемся десятью хорошо известными каждому значками 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, которые называются *цифрами*. Никому сейчас не кажется странным, что с помощью этих десяти значков (цифр) мы в состоянии написать любое, даже очень большое или очень малое, целое или дробное число.

Числа от единицы до девяти мы записываем с помощью только одной из первых девяти цифр. Для написания чисел от десяти до девяноста девяти нам понадобятся уже две цифры, одной из которых может быть и нуль, и т. д.

За основу счисления мы принимаем число «десять», поэтому наша система нумерации называется *десятичной*.

Это значит, что десять простых единиц (единиц первого разряда) образуют один десяток (одну единицу второго разряда), десять десятков образуют одну сотню (одну единицу третьего разряда), десять сотен составляют одну тысячу (одну единицу четвертого разряда) и вообще каждые десять единиц какого-нибудь разряда образуют одну единицу следующего, более высокого разряда.

У многих народов системы счисления были десятичными. Это связано с тем, что на наших руках десять пальцев.

При записи чисел мы на крайнем месте справа пишем цифру, обозначающую число простых единиц, левее пишем цифру, обозначающую число десятков, еще левее — цифру, обозначающую число сотен, на четвертом месте слева пишем цифру, обозначающую число тысяч, и т. д. Так, например, запись 2746 означает, что число состоит из двух тысяч, семи сотен, четырех десятков и шести единиц.

Если число не содержит единиц какого-нибудь разряда, то на соответствующем месте мы пишем нуль. Например, число, состоящее из трех тысяч и пяти единиц, записывается так: 3005. В нем отсутствуют десятки и сотни, т. е. единицы второго и третьего разрядов, поэтому на втором и третьем месте справа мы пишем по нулю.

Заметили ли вы еще одну замечательную особенность системы нумерации, которой мы все время пользуемся? В самом деле, например, для записи числа 14742 мы дважды применили цифру 4, причем цифра 4, стоящая на втором месте справа, обозначает, что данное число содержит четыре десятка, в то время как та же цифра 4, стоящая на четвертом месте справа, обозначает уже, что это число содержит четыре тысячи. Выходит, что одна и та же цифра может означать и количество единиц, и количество десятков, и количество сотен и т. д. в зависимости от положения (позиции), которое эта цифра занимает в записи числа. Отсюда и произошло название *п о з и ц и о н н а я* система счисления.

Вернемся к числу 2746, о котором мы говорили раньше. В нем первая цифра справа (цифра 6) обозначает 6 единиц, вторая цифра справа (4) обозначает 4 десятка, т. е. число

$$40 = 4 \cdot 10,$$

третья цифра справа (7) обозначает 7 сотен, т. е. число

$$700 = 7 \cdot 10 \cdot 10 = 7 \cdot 10^2,$$

и, наконец, четвертая цифра (2) обозначает 2 тысячи, т. е. число

$$2000 = 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2 \cdot 10^3.$$

Указанное число, следовательно, можно записать в виде:
 $2746 = 2000 + 700 + 40 + 6 = 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 6.$

Каждые три разряда в числе образуют класс. Счет классов также ведется справа налево. Сначала идет первый класс, состоящий из единиц, десятков и сотен, затем второй класс, состоящий из тысяч, десятков тысяч и сотен тысяч, затем третий класс, состоящий из миллионов, десятков миллионов и сотен миллионов, и т. д.

Задумывались ли вы над вопросом: почему так просто, легко и достаточно быстро производятся над числами четыре арифметических действия: сложение, вычитание, умножение и деление? Эти преимущества предоставил нам последовательно проведенный позиционный принцип записи чисел.

В самом деле, при производстве над числами какого-нибудь арифметического действия мы обращаемся с десятками, сотнями, тысячами и т. д. совершенно так же, как если бы они были единицами, и, только получив окончательный результат, вспоминаем о его разрядах.

Итак, для записи чисел мы пользуемся десятичной позиционной системой счисления. Вот что писал о ней известный французский математик и физик Лаплас (XVIII—XIX вв.): «Мысль выражать все числа десятью знаками, придавая им, кроме значения по форме, еще значение по месту, настолько проста, что именно из-за этой простоты трудно понять, насколько она удивительна».

Сейчас почти все человечество пользуется этой простой системой счисления, причем одинаковым для всех является не только принцип построения этой системы, но и начертание цифр.

Как же возникла эта удивительная десятичная позиционная система счисления?

Несмотря на кажущуюся ее простоту, людям понадобилось несколько тысячелетий, чтобы прийти к ней. Не будет преувеличением, если мы скажем, что в создании такой системы участвовали все народы мира.

Первоначально десятичная позиционная система нумерации появилась в Индии и уже к середине VIII века

получила там широкое распространение. Примерно в это же время она проникает в Китай и некоторые другие страны Востока. Европейцы заимствовали эту индийскую систему нумерации в XIII веке у арабов. Отсюда и возникло ее исторически неправильное название «арабская нумерация».

Какие же системы счисления были в обиходе до десятичной позиционной? Этот вопрос достаточно интересен, чтобы на нем остановиться подробнее. Это даст нам возможность лучше оценить преимущества нашей системы счисления.

ДРЕВНЯЯ ЕГИПЕТСКАЯ НУМЕРАЦИЯ

Начнем с одной из самых древних нумераций — египетской. Зародилась она, пожалуй, более 5000 лет тому назад, т. е. более 3000 лет до нашей эры. В течение первых трех тысячелетий она почти совершенно не менялась. Давайте

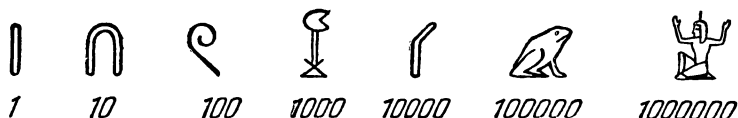


Рис. 1. Такие особые знаки (иероглифы) употребляли древние египтяне для обозначения чисел.

познакомимся поближе с этой древней нумерацией и посмотрим, как изображались в ней числовые знаки и каким образом с помощью этих знаков записывались числа.

В египетской нумерации существовали особые знаки (иероглифы) для чисел: единица, десять, сто, тысяча,



Рис. 2. Запись числа 23145 в египетской системе нумерации.

десять тысяч, сто тысяч, миллион. Эти знаки изображены на рис. 1. Для того чтобы изобразить, например, целое число 23145, достаточно записать в ряд два иероглифа, изображающих десять тысяч, затем три иероглифа для тысячи, один — для ста, четыре — для десяти и пять иероглифов для единицы (см. рис. 2). Таким образом, в записи числа

каждый иероглиф мог повторяться не более девяти раз. В египетской системе счисления не было знака для нуля.

Этого одного примера вполне достаточно, чтобы научиться записывать числа так, как их изображали древние египтяне. Эта система счисления очень проста и примитивна; она чисто десятичная, так как при изображении целых чисел в ней применяется поразрядный десятичный принцип. Между тем каждый числовой знак в ней обозначает лишь одно число. Так, например, знак для десяти (см. рис. 1) означает лишь десять единиц, но не десять десятков или десять сотен. Значит, египетская система нумерации не была позиционной.

СТАРИННАЯ НАРОДНАЯ НУМЕРАЦИЯ

По принципу древней египетской нумерации строились системы нумерации и у некоторых других народов, например у древних греков. Дальше (см. стр. 15) мы расскажем об этом подробнее.

В старину в нашей стране была в довольно широком употреблении народная система нумерации, которая также строилась по принципу древней египетской, но отличалась от нее изображением числовых знаков.

Любопытно, что эта народная нумерация была некогда у нас даже узаконена: по такой именно системе, только более развитой, должны были вестись сборщиками податей записи в податной тетради.

«Сборщик, — читаем мы в старом „С в о д е з а к о н о в“, — принимая от кого-либо из домохозяев вносимые к нему деньги, должен сам, или через писаря, записать в податной тетради против имени того домохозяина, которого числа сколько получено денег, выставя количество принятой суммы цифрами и з н а к а м и. Знаки сии для сведения всех и каждого ввести повсеместно одинаковые, а именно:

десять рублей означать знаком	□
рубель	○
десять копеек	×
копейку	
четверть	—

Например, двадцать восемь рублей пятьдесят семь копеек три четверти:

(□□○○○○○○○○○○××××××| | | | | | | ≡)».

В другом месте того же тома «Свода законов» находим еще раз упоминание об обязательном употреблении народных числовых обозначений. Приводятся особые знаки для тысячи рублей — в виде шестиконечной звезды с крестом в ней и для ста рублей — в виде колеса с восемью спицами. Но обозначения для рубля и десяти копеек здесь устанавливаются иные, чем в предыдущем законе.

Вот текст закона об этих так называемых «ясачных знаках»:

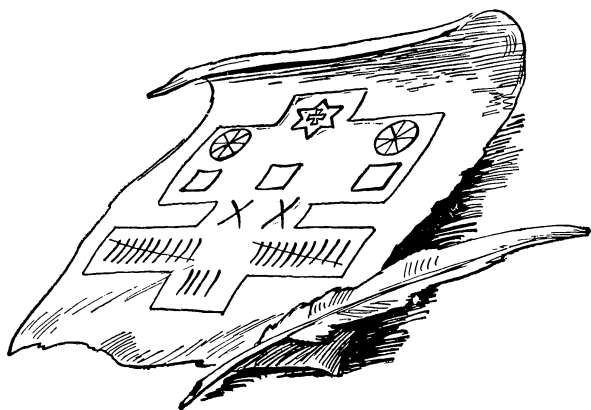


Рис. 3. Старинная запись на квитанции об уплате подати («ясака»). Эта запись означает сумму 1232 р. 24 к.

«Чтобы на каждой квитанции, выдаваемой Родовитому Старосте, от которого внесен будет ясак, кроме изложения словами, было показываемо особыми знаками число внесенных рублей и копеек так, чтобы сдающие простым счетом сего числа могли быть уверены в справедливости показания¹⁾. Употребляемые в квитанции знаки означают:

(звезда) тысяча рублей,	
(колесо) сто рублей,	
□ десять рублей,	× один рубль,
десять коп.,	копейку.

Дабы не можно было сделать здесь никаких прибавлений, все таковые знаки очерчивать кругом прямыми линиями. Например, 1232 р. 24 к. изображают так» (см. рис. 3).

¹⁾ Это показывает, что описанные знаки были в широком употреблении среди населения.

РИМСКАЯ НУМЕРАЦИЯ

Из всех старинных нумераций римская является, пожалуй, единственной, сохранившейся до сих пор и довольно широко применяемой. Римские цифры употребляются и сейчас для обозначения столетий, нумерации глав в книгах и т. д.

Для записи целых чисел в римской нумерации надо запомнить изображения следующих семи основных (узловых) чисел:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

С их помощью мы можем записать любое целое число не больше 4000, при этом некоторые из цифр (I, X, C, M) могут повторяться, но не более трех раз.

При записи чисел в римской системе счисления меньшая цифра может стоять справа от большей; в этом случае она прибавляется к ней. Например, число 283 мы записываем по-римски так:

CCLXXXIII,

т. е. $200 + 50 + 30 + 3 = 283$. Здесь цифра, изображающая сотню, повторена два раза, а цифры, изображающие соответственно десяток и единицу, повторены по три раза.

Меньшая цифра может быть записана и слева от большей, тогда ее следует вычесть из большей. В этом случае повторения меньшей цифры не допускаются. Приведенные ниже примеры помогут вам вполне уяснить способ записи чисел в римской нумерации.

Запишем по-римски числа 94, 944, 1809, 1959:

$$XCIV = 100 - 10 + 5 - 1 = 94,$$

$$CMXLIV = 1000 - 100 + 50 - 10 + 5 - 1 = 944,$$

$$MDCCCIX = 1000 + 500 + 300 + 10 - 1 = 1809,$$

$$MCMLIX = 1000 + 1000 - 100 + 50 + 10 - 1 = 1959.$$

Заметили ли вы, что в этой системе нет значка для изображения нуля? Между тем мы вполне обошлись без него при записи числа 1809.

На рис. 4 мы приводим запись в римской нумерации всех целых чисел от 1 до 100.

С помощью римских цифр можно записывать и большие числа. Для этого после записи числа тысяч ставят внизу

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
XXI	XXII	XXIII	XXIV	XXV	XXVI	XXVII	XXVIII	XXIX	XXX
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
XXXI	XXXII	XXXIII	XXXIV	XXXV	XXXVI	XXXVII	XXXVIII	XXXIX	XL
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
XL	XLI	XLII	XLIII	XLIV	XLV	XLVI	XLVII	XLVIII	XLIX
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
L	LII	LIII	LIV	LV	LVI	LVII	LVIII	LIX	LX
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
LXI	LXII	LXIII	LXIV	LXV	LXVI	LXVII	LXVIII	LXIX	LXX
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
LXXI	LXXII	LXXIII	LXXIV	LXXV	LXXVI	LXXVII	LXXVIII	LXXIX	LXXX
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
LXXXI	LXXXII	LXXXIII	LXXXIV	LXXXV	LXXXVI	LXXXVII	LXXXVIII	LXXXIX	XC
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
XCI	XCII	XCIII	XCIV	XCV	XCVI	XCVII	XCVIII	XCIX	C
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Рис. 4. Так записываются в римской нумерации все целые числа от 1 до 100.

справа латинскую букву *m*. Покажем это на примере записи числа 417 986:

CDXVII_m CMLXXXVI.

Римская система счисления, так же как и древняя египетская, не является позиционной: каждая цифра в ней изображает лишь одно вполне определенное число. Однако,

в отличие от древней египетской, она не является чисто десятичной. Наличие в римской системе специальных знаков для чисел пять, пятьдесят, пятьсот показывает, что в ней имеются довольно сильные следы пятеричной системы счисления¹⁾.

Римская нумерация совершенно не приспособлена для производства арифметических действий в письменном виде. Это ее крупный недостаток.

ДРЕВНЯЯ ГРЕЧЕСКАЯ НУМЕРАЦИЯ

Продолжим наш рассказ о непозиционных системах счисления и лишь в конце этой главы подробнее опишем одну из самых древних систем счисления (появившуюся, однако, позднее египетской) — вавилонскую, которая была первой позиционной системой.

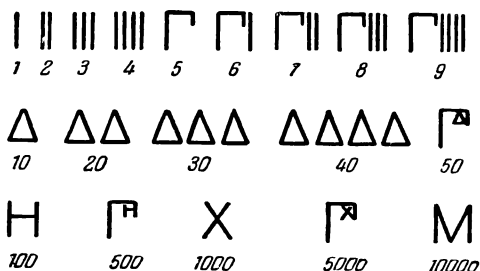


Рис. 5. Запись некоторых чисел в аттической, или геродиановой, нумерации.

Много общего с римской системой счисления имеет так называемая аттическая, или геродианова²⁾, нумерация, которой пользовались в древней Греции. На рис. 5 приведены изображения некоторых чисел в этой нумерации. Этот рисунок показывает, что, в отличие от римской нумерации, здесь изображения для чисел единица, десять, сто, тысяча могут повторяться не три раза, а четыре, но зато а п р е щ а е т с я писать меньшую цифру слева от большей.

¹⁾ Вообще системам счисления, отличным от десятичной, мы посвящаем дальше целую главу (см. гл. IV).

²⁾ Геродиан — греческий историк II—III веков нашей эры. Из его произведений ученые впервые узнали об аттической нумерации. Древнейшая из найденных записей по этой нумерации относится к VI веку до нашей эры.

На рис. 6 приведены примеры изображения целых чисел в аттической системе нумерации, которые вполне разъясняют способ такой записи.



Рис. 6. Примеры, разъясняющие способ записи целых чисел в аттической системе нумерации.

этом над буквами, изображающими числа, писали черточку. Такая система нумерации называется алфавитной.

Ионийская алфавитная нумерация состоит из 27 букв (см. рис. 7; на нем под каждой буквой указано ее название и числовое значение). На рис. 7 указаны три буквы (фау,

$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\gamma}$	$\bar{\delta}$	$\bar{\epsilon}$	$\bar{\varsigma}$	$\bar{\zeta}$	$\bar{\eta}$	$\bar{\theta}$
альфа	бэта	гамма	дельта	эпсилон	фау	дзета	эта	тэта
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\bar{\iota}$	$\bar{\kappa}$	$\bar{\lambda}$	$\bar{\mu}$	$\bar{\nu}$	$\bar{\xi}$	$\bar{\omicron}$	$\bar{\pi}$	$\bar{\varsigma}$
йота	каппа	ламбда	мю	ню	кси	омикрон	пи	коппа
10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\bar{\rho}$	$\bar{\sigma}$	$\bar{\tau}$	$\bar{\upsilon}$	$\bar{\phi}$	$\bar{\chi}$	$\bar{\psi}$	$\bar{\omega}$	$\bar{\var�}$
ро	сигма	тау	ипсилон	фи	хи	пси	омега	сампи
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Рис. 7. Обозначение чисел в ионийской алфавитной нумерации.

коппа и сампи), которые сейчас вышли из употребления. Однако обойтись без них нельзя, так как необходимо иметь 27 знаков для обозначения нужных нам 27 узловых чисел.

С помощью таблицы, приведенной на рис. 7, мы можем легко написать любое целое число от 1 до 999 включительно. В качестве примера напишем в ионийской нумерации числа 234, 805, 560:

$\overline{\sigma\lambda\delta}$	$\overline{\omega\varepsilon}$	$\overline{\varphi\xi}$
234	805	560

В этой нумерации можно записывать и числа, бóльшие тысячи. Для этого около буквы (слева сверху от нее) пишется штрих ' (наличие штриха увеличивает числовое значение соответствующей буквы в тысячу раз), например:

'α обозначает 1000, 'β обозначает 2000,
'ι обозначает 10 000, 'κ обозначает 20 000.

Вы, по-видимому, сами уже обратили внимание на то, что ионийская нумерация является чисто десятичной, но не позиционной. Это замечание относится и к другим алфавитным нумерациям.

СЛАВЯНСКАЯ НУМЕРАЦИЯ

Славянские народы также пользовались алфавитной нумерацией. На рис. 8 изображены 27 букв славянского

$\tilde{\text{А}}$	$\tilde{\text{Б}}$	$\tilde{\text{Г}}$	$\tilde{\text{Д}}$	$\tilde{\text{Е}}$	$\tilde{\text{С}}$	$\tilde{\text{З}}$	$\tilde{\text{И}}$	$\tilde{\text{Ј}}$
<i>аз</i>	<i>веди</i>	<i>глаголь</i>	<i>добро</i>	<i>есть</i>	<i>зело</i>	<i>земля</i>	<i>уже</i>	<i>фита</i>
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{\text{І}}$	$\tilde{\text{К}}$	$\tilde{\text{Л}}$	$\tilde{\text{М}}$	$\tilde{\text{Н}}$	$\tilde{\text{Ѣ}}$	$\tilde{\text{О}}$	$\tilde{\text{П}}$	$\tilde{\text{Ч}}$
<i>и</i>	<i>како</i>	<i>люди</i>	<i>мыслете</i>	<i>наш</i>	<i>кси</i>	<i>он</i>	<i>покой</i>	<i>червь</i>
10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\tilde{\text{Р}}$	$\tilde{\text{С}}$	$\tilde{\text{Т}}$	$\tilde{\text{У}}$	$\tilde{\text{Ф}}$	$\tilde{\text{Х}}$	$\tilde{\text{Ѱ}}$	$\tilde{\text{Ѡ}}$	$\tilde{\text{Ц}}$
<i>рцы</i>	<i>слово</i>	<i>твёрдо</i>	<i>ук</i>	<i>ферт</i>	<i>ха</i>	<i>пси</i>	<i>о</i>	<i>цы</i>
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Рис. 8. Обозначение чисел в славянской алфавитной нумерации.

алфавита. Под каждой буквой написано ее название и числовое значение. Над буквой, изображающей число, ставился значок (см. рис. 8), называемый «титло».

БАВИЛОНСКАЯ НУМЕРАЦИЯ

Наиболее любопытной из всех древних систем счисления является вавилонская, возникшая примерно за 2000 лет до нашей эры. Она является первой известной нам позиционной системой счисления. Числа в этой системе изображались с помощью только двух знаков: вертикального клина ∇ , означавшего единицу, и горизонтального клина \triangleleft ,

означавшего число десять. Такие клинышки выдавливались на глиняных таблечках наклоненными палочками, имевшими форму треугольной призмы. Отсюда и произошло слово «клинопись» — название письменности древних вавилонян.

С помощью указанных двух знаков все целые числа от 1 до 59 записывались по десятичной системе точно так же, как и в египетской нумерации, т. е. знаки для десяти и для единицы повторялись соответственно столько раз, сколько в числе десятков и единиц. Приведем несколько поясняющих примеров:

$$\begin{aligned} \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla &= 20 + 5 = 25 & \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla &= 40 + 7 = 47 \\ & & \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla &= 50 + 9 = 59 \end{aligned}$$

Во всем этом пока еще нет ничего особенного и нового. Но затем появляется совершенно новое: именно число 60 записывается точно таким же знаком, что и 1, только с немного бóльшим промежутком между ним и остальными знаками. Дальше с шестидесятками счет производится по десятичной системе как с единицами, так и десятками. Приведем и здесь поясняющие примеры:

$$\begin{aligned} \nabla \nabla \nabla &= 1 \cdot 60 + 5 = 65, & \nabla \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla &= 1 \cdot 60 + 23 = 83, \\ \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla &= 5 \cdot 60 + 2 = 302, & \triangleleft \nabla \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla &= 12 \cdot 60 + 34 = 754 \end{aligned}$$

Таким способом мы уже умеем теперь изображать числа от 1 до $59 \cdot 60 + 59 = 3599$.

Далее идет единица нового разряда (т. е. число $1 \cdot 60 \cdot 60 = 3600$), которая также изображается знаком для единицы, например:

$$\nabla \triangle \nabla \triangle \triangle = 1 \cdot 60 \cdot 60 + 12 \cdot 60 + 21 = 4341$$

Таким образом, единица второго разряда, изображенная тем же значком, в 60 раз больше единицы первого, а единица третьего разряда в 60 раз больше единицы второго и в $60 \cdot 60 = 60^2 = 3600$ раз больше единицы первого разряда и т. д.

— Ну, а как же быть, если один из промежуточных разрядов отсутствует? — спросите вы. Как, например, записать число $1 \cdot 60 \cdot 60 + 23 = 3623$? Если записать его просто в виде

▽ ◁ ▷ ≡

то его можно спутать с числом $1 \cdot 60 + 23 = 83$. Во избежание путаницы позднее ввели разделительный знак \bowtie , который играл такую же роль, какую знак «ноль» играет в нашей нумерации. Теперь с помощью указанного разделительного знака число 3623 запишется так:

$$7 \lll \lll \lll = 1 \cdot 60 \cdot 60 + 0 \cdot 60 + 23 = 3623$$

В конце же числа разделительный знак вавилоняне так никогда и не ставили. Поэтому числа 3, $3 \cdot 60 = 180$, $3 \cdot 60 \cdot 60 = 10\,800$ и т. д. изображались совершенно одинаково. Приходилось по смыслу текста угадывать, о каком из этих чисел шла речь.

Примечательно, что в вавилонской математике для дробей употреблялась та же запись, что и для целых чисел. Например, написанные рядом три вертикальных клинышка могли обозначать $\frac{3}{60}$, либо $\frac{3}{60 \cdot 60} = \frac{3}{3600}$, либо $\frac{3}{60 \cdot 60 \cdot 60} = \frac{3}{216\,000}$ и т. д.

Какие же выводы мы можем сделать теперь об особенностях вавилонской нумерации?

Во-первых, мы замечаем, что эта система нумерации является позиционной. В самом деле, один и тот же знак может изображать в ней и 1, и $1 \cdot 60$, и $1 \cdot 60 \cdot 60 = 1 \cdot 60^2 = 1 \cdot 3600$ и т. д. в зависимости от того, на каком месте он записан. Точно так же, как в нашей системе нумерации, одна и та же цифра, например 2, может изображать числа: 2, или $2 \cdot 10 = 20$, или $2 \cdot 10 \cdot 10 = 2 \cdot 10^2 = 2 \cdot 100 = 200$ и т. д. в зависимости от того, находится ли она в первом, втором или третьем разряде. Однако позиционный принцип проводится в вавилонской нумерации только в шестидесятеричных разрядах. Поэтому она называется **ш е с т и д е с я т е р и ч н о й п о з и ц и о н н о й с и с т е м о й** нумерации. Числа до 60 записывались в этой системе по десятичному принципу.

Во-вторых, вавилонская нумерация допускала простую запись шестидесятеричных дробей, т. е. дробей со знаменателями 60, $60 \cdot 60 = 3600$, $60 \cdot 60 \cdot 60 = 216\,000$ и т. д.

Шестидесятеричные дроби получили в свое время очень широкое распространение. Ведь и сейчас мы делим 1 час на 60 минут, а 1 минуту на 60 секунд. Точно так же мы делим окружность на 360 частей, что составляет 1 градус, его мы делим на 60 минут, а 1 минуту — на 60 секунд.

Как видите, употребляемая нами очень широко индийская система счисления далеко не единственный способ обозначения чисел.

Существовало много и других способов изображения чисел, так, например, многие купцы имели свои секретные знаки для числовых обозначений — так называемые торговые «меты». О них побеседуем сейчас подробнее.

СЕКРЕТНЫЕ ТОРГОВЫЕ «МЕТЫ»

В дореволюционное время на вещах, купленных у *офеней*¹⁾ или в частных магазинах, особенно провинциальных, можно было зачастую заметить непонятные буквенные обозначения вроде

а в е в у о.

Это не что иное, как цена вещи без запроса, которую торговец обозначал на товаре, но так, однако, чтобы ее не

¹⁾ Офеня — бродячий торговец, разносчик, продававший по деревням галантерею, мануфактуру, книжки, лубочные картинки.

мог разгадать покупатель. Бросив взгляд на эти буквы, торговец сразу проникал в их скрытый смысл и, сделав надбавку, называл покупателю цену с запросом.

Система обозначений была весьма проста. Торговец выбирал какое-нибудь слово, составленное из 10 различных букв; чаще всего останавливали выбор на словах: «трудолюбие», «правосудие». Первая буква слова обозначала 1, вторая 2, третья 3 и т. д.; десятой буквою обозначался нуль. С помощью этих условных букв-цифр торговец и обозначал на товарах их цену, храня в строгом секрете «ключ» к своей системе прибылей.

Если, например, выбрано было слово:

п р а в о с у д и е
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

то цена 4 р. 75 к. обозначалась так:

в уо

Иногда цена на товаре писалась в виде дроби; например, на одной из купленных мною книг имеется обозначение (рис. 9)

$\frac{о е}{т р о}$

Это значит, при ключе «трудолюбие», что надо запросить 1 р. 25 к.; себе же книга стоила 50 коп.

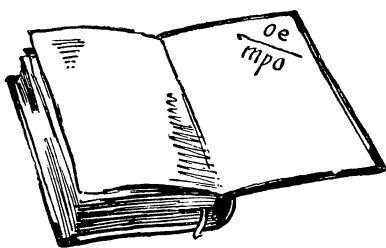


Рис. 9. Торговая «мета» на крышке переплета (изображенная здесь мета означала, что себестоимость книги 50 коп., а продажная цена 1 р. 25 к.).

ПЕШКИ ВМЕСТО ЦИФР

После только что сказанного легко понять, что числа можно изображать не только с помощью цифр, но и с помощью любых иных знаков или даже предметов: карандашей, перьев, линеек, резинок и т. п., надо только условиться

приписывать каждому предмету значение какой-нибудь определенной цифры. Можно даже ради курьеза с помощью таких цифр-предметов изображать действия над числами: складывать, вычитать, умножать, делить.

В одном шахматном журнале была предложена задача: раскрыть истинный смысл изображенного на рис. 10 примера деления чисел, в котором почти все цифры заменены пешками. Из 28 цифр известны только две: одна (8) в частном и другая (1) в остатке. Казалось бы, доискаться значения прочих 26 цифр, обозначенных пешками, немислимо. Меж-

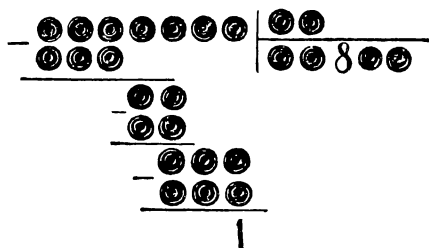


Рис. 10. Раскройте истинный смысл нарисованного здесь примера деления чисел.

ду тем это сравнительно несложная задача для каждого, кто отчетливо представляет себе смысл отдельных операций, входящих в состав действия деления.

Вот какой ход рассуждений приводит нас к цели.

Вторая цифра частного есть, конечно, 0, так как к остатку

от первого вычитания снесена не одна цифра, а две. В самом деле, после того, как мы снесли первую цифру, составилось число, меньшее делителя, а в таких случаях очередная цифра частного есть 0.

Точно такими же рассуждениями устанавливаем, что четвертая цифра частного есть также 0.

Всматриваясь в расположение пешек, замечаем, что двузначный делитель, будучи умножен на 8, дает число двузначное; при умножении же его на первую (пока неизвестную) цифру частного получается число из трех цифр. Значит, эта первая цифра частного больше 8; такой цифрой может быть только 9.

Сходным образом устанавливаем, что и последняя цифра частного есть 9.

Теперь частное определилось; оно равно 90 809. Остается раскрыть смысл делителя. Как видно из рис. 10, делитель состоит из двух цифр; кроме того, расположение пешек говорит о том, что это двузначное число при умножении на 8 дает также двузначное число; при умножении же на 9 оно дает произведение, состоящее из трех цифр. Что

же это за число? Производим испытания, начиная с наименьшего двузначного числа, 10:

$$\begin{array}{l} 10 \times 8 = 80, \\ 10 \times 9 = 90. \end{array}$$

Число 10, как видим, не удовлетворяет требуемым условиям: оба произведения — двузначные числа. Испытываем следующее двузначное число, 11:

$$\begin{array}{l} 11 \times 8 = 88, \\ 11 \times 9 = 99. \end{array}$$

Число 11 также, очевидно, не годится: оба произведения — снова двузначные числа. Испытываем 12:

$$\begin{array}{l} 12 \times 8 = 96, \\ 12 \times 9 = 108. \end{array}$$

Число 12 удовлетворяет всем требованиям. Нет ли еще таких чисел? Испытаем 13:

$$\begin{array}{l} 13 \times 8 = 104, \\ 13 \times 9 = 117. \end{array}$$

Оба произведения — трехзначные числа; следовательно, 13 не годится. Ясно, что неподходящими являются и все числа, большие чем 13.

Итак, единственный возможный делитель — число 12. Зная делитель, частное и остаток, легко находим делимое и восстанавливаем весь процесс деления.

Итак,

$$\text{делимое} = 90\,809 \times 12 + 1 = 1\,089\,709.$$

Окончательно имеем, следовательно, такой пример деления с остатком:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} \text{— } 1089709 \\ \text{— } 108 \\ \hline 97 \\ \text{— } 96 \\ \hline 109 \\ \text{— } 108 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \quad 12 \\ \hline 90809 \end{array} \end{array}$$

Как видим, по двум известным цифрам нам удалось установить смысл 26 неизвестных цифр.

АРИФМЕТИКА ЗА ЗАВТРАКОМ

Перед нами ряд действий над числами, обозначенными предметами сервировки стола (рис. 11). Вилка, ложка, нож, кувшинчик, чайник, тарелка — все это знаки, каждый из которых заменяет определенную цифру.

Глядя на эту группу ножей, вилок, посуды и т. п., попробуйте угадать: какие именно числа здесь обозначены?

С первого взгляда задача кажется очень трудной: приходится разгадывать настоящие иероглифы, как сделал некогда француз Шамполион ¹⁾. Но ваша задача гораздо легче: вы ведь знаете, что числа здесь хотя обозначены вилками, ножами, ложками и т. п., но написаны по десятичной системе счисления, т. е. нам известно, что тарелка, стоящая на втором месте (считая справа), есть цифра десятков, что предмет направо от нее — цифра единиц, а по левую сторону — цифра сотен. Кроме того, вы знаете, что расположение всех этих предметов имеет определенный смысл, который вытекает

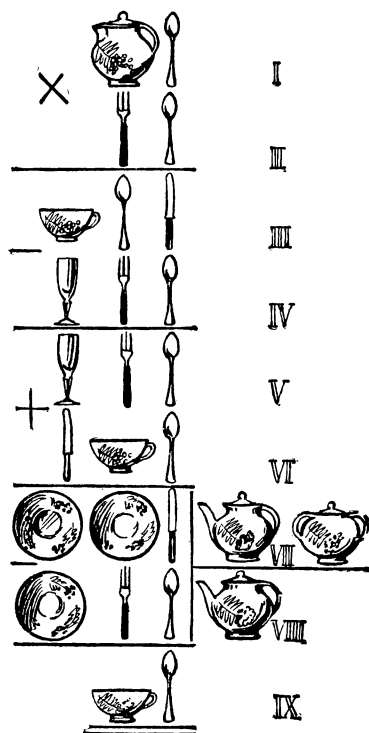


Рис. 11. Над какими числами производятся обозначенные здесь арифметические действия?

из сущности арифметических действий, производимых над обозначенными ими числами. Все это может значительно облегчить вам решение предложенной задачи.

Вот как можно доискаться значения расставленных здесь предметов. Рассматривая первые три ряда на нашем ри-

¹⁾ Шамполион (1790—1832) — известный французский филолог, основатель египтологии — науки, изучающей язык, историю и культуру Древнего Египта и граничивших с ним стран.

сунке, вы видите, что «ложка», умноженная на «ложку», дает «нож». А из следующих рядов видно, что «нож» без «ложки» дает «ложку» или что «ложка» + «ложка» = «ножу». Какая же цифра дает одно и то же и при удвоении и при умножении сама на себя? Это может быть только 2, потому что $2 \times 2 = 2 + 2$. Таким образом узнаем, что «ложка» = 2 и, следовательно, «нож» = 4.

Теперь идем дальше. Какая цифра обозначена «вилкой»? Попробуем разгадать это, присмотревшись к первым трем рядам, где «вилка» участвует в умножении, и к рядам III, IV и V, где та же «вилка» фигурирует в действии вычитания. Из группы вычитания вы видите, что, отнимая в разряде десятков «вилку» от «ложки», получаем в результате «вилку», т. е. при вычитании 2 минус «вилка» получается «вилка». Это может быть в двух случаях: либо «вилка» = 1, и тогда $2 - 1 = 1$; либо же «вилка» = 6, и тогда, вычитая 6 из 12 (единица высшего разряда занимается у «чашки»), получаем 6. Что же выбрать: 1 или 6?

Испытаем, годится ли 6 для «вилки» в других действиях. Обратите внимание на умножение чисел, стоящих в I и II рядах. Если «вилка» = 6, то во втором ряду стоит число 62 (мы уже знаем, что «ложка» = 2). Нетрудно понять, что в таком случае в I ряду должно стоять число 12, т. е. «кувшинчик» обозначает цифру 1. В самом деле, если бы «кувшинчик» обозначал цифру 2 или какую-либо большую цифру, произведение чисел I и II рядов было бы четырехзначным числом, а не трехзначным, как должно быть. Итак, если «вилка» = 6, то в I ряду стоит число 12, а во II ряду — 62. Их произведение есть $12 \times 62 = 744$.

Но этого не может быть, так как цифра десятков этого произведения есть «ложка», т. е. 2, а не 4, как получилось у нас. Значит, нельзя было допустить, что «вилка» = 6, а надо было принять ее равной единице.

Узнав путем таких — довольно, правда, долгих — поисков, что «вилка» обозначает цифру 1, мы дальше уже идем более уверенно и быстро. Из действия вычитания в III и IV рядах видим, что «чашка» обозначает либо 6, либо 8. Но 8 приходится отвергнуть, потому что тогда вышло бы, что «бокальчик» = 4, а мы знаем, что цифра 4 обозначена «ножом». Итак, «чашка» обозначает цифру 6, а следовательно, «бокальчик» — цифру 3.

Какая же цифра обозначена «кувшинчиком» в I ряду? Это легко узнать, раз нам известно произведение (III ряд,

624) и один из множителей (II ряд, 12). Разделив 624 на 12, получаем 52. Следовательно, «кувшинчик»=5.

Значение «тарелки» определяется просто: в VII ряду «тарелка»=«вилка»+«чашка»=«бокальчик»+«нож», т. е. «тарелка» = 1 + 6 = 3 + 4 = 7.

Остается разгадать цифровое значение «чайника» и «сахарницы» в VII ряду. Так как для цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 предметы уже найдены, то остается выбирать только между 8, 9 и 0. Подставив в действие деления, изображенное в последних трех рядах, соответствующие цифры вместо предметов, получим такое расположение (буквами *ч* и *с* обозначены «чайник» и «сахарница»):

$$\begin{array}{r} 774:чс = ч \\ 712 \\ \hline 62 \end{array}$$

Число 712, мы видим, есть произведение двух неизвестных чисел *чс* и *ч*, которые, конечно, не могут быть ни нулем, ни оканчиваться нулем: значит, ни *ч*, ни *с* не есть нуль. Остаются два предположения: *ч*=8 и *с*=9 или же, наоборот, *ч*=9 и *с*=8. Но умножив 98 на 8, мы не получаем 712; следовательно, «чайник» обозначает 8, а «сахарница» 9 (действительно: $89 \times 8 = 712$).

Итак, мы путем нехитрых арифметических вычислений разгадали иероглифическую надпись из предметов столовой сервировки:

кувшин	обозначает — 5	нож	— 4	чайник	— 8
ложка	— 2	чашка	— 6	сахарница	— 9
вилка	— 1	бокальчик	— 3	тарелка	— 7

А весь ряд арифметических действий, изображенный этой оригинальной сервировкой, приобретает такой смысл:

$$\begin{array}{r} \times 52 \\ 12 \\ \hline 624 \\ - 312 \\ \hline 312 \\ + 462 \\ \hline 774:89 = 8 \\ - 712 \\ \hline 62 \end{array}$$

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ РЕБУСЫ

То, что я называю арифметическими ребусами, — занимательная игра: отгадывание задуманного слова решением задачи вроде той, какую мы решили в предыдущей статье. Загадывающий задумывает слово, состоящее из 10 неповторяющихся букв, например: «трудолюбие», «специально», «просвещать». Приняв буквы задуманного слова за цифры, загадывающий изображает посредством этих букв какой-нибудь случай деления. Если задумано слово «просвещать», то можно взять такой пример деления:

<i>п р о с в е щ а т ь</i>	— 123564	3548	— <i>п ровес</i>	<i>овса</i>
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0	— 10644	<u>34</u>	— <i>п ь е с с</i>	<u>о с</u>
делимое — <i>п ровес</i> ,	— 17124		— <i>п и щ и р с</i>	
123564	— 14192		— <i>п с и п т р</i>	
делитель — <i>овса</i> ,	<u>2932</u>		<u>р т о р</u>	
3548				

Можно взять и другие слова:

	— <i>в о с с т а т ь</i>	<i>с вет</i>
	— <i>с в е т</i>	<u>п п е т а</u>
	— <i>щ и щ в т</i>	
	— <i>с в е т</i>	
делимое — <i>восстать</i> ,	— <i>о п т ь а</i>	
53449890	<u>р и щ с п с</u>	
делитель — <i>свет</i> ,	— <i>с с т с т</i>	
4569	<u>с п п р п</u>	
	— <i>о а р а ь</i>	
	— <i>о е в в р</i>	
	<u>п ш р а</u>	

Буквенное изображение определенного случая деления вручается отгадчику, который и должен по этому, на первый взгляд бессмысленному, набору букв угадать задуманное слово. Как следует в подобных случаях доискиваться числового значения букв, читатель уже знает: мы объяснили это, когда решали задачу предыдущей статьи. При некотором терпении можно успешно разгадывать эти арифметические ребусы, если только пример достаточно длинен и

дает необходимый материал для догадок и испытаний. Если же выбраны слова, дающие чересчур короткий случай деления, например:

<i>т р у д о л ю б и е</i> 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 делимое — <i>блюдо</i> , 86745 делитель — <i>труд</i> , 1234	$\begin{array}{r l} \text{блюдо} & \text{труд} \\ \hline \text{блуб} & \text{юе} \\ \hline \text{уло} & \end{array}$
--	--

то разгадывание очень трудно. В подобных случаях надо просить загадывающего продолжить деление до сотых или тысячных долей, т. е. получить в частном еще два или три десятичных знака. Вот пример деления для сотых долей:

<i>с п е ц и а л ь н о</i> 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 делимое — <i>палец</i> , 26734 делитель — <i>пила</i> , 2576	$\begin{array}{r l} \text{палец} & \text{пила} \\ \hline \text{пила} & \text{со, ел} \\ \hline \text{нлцо} & \\ \hline \text{лль} & \\ \hline \text{поспо} & \\ \hline \text{сьоеп} & \\ \hline \text{побь} & \end{array}$
--	--

Если бы в этом случае мы остановились на целом частном (*со*), отгадка задуманного слова едва ли была бы возможна.

Что касается слов, пригодных в качестве «ключа» для подобных ребусов, то выбор их не так беден, как может казаться; кроме прежде указанных, можно использовать слова:

<i>республика</i>	<i>пятидневка</i>
<i>демократия</i>	<i>струбцинка</i>

Как далеко может идти изобретательность в этом направлении, показывает следующий пример. Один из читателей прислал мне остроумно составленный арифметический ребус, разгадка которого представляет собою... лозунг для пропаганды идеи межпланетных путешествий. Ребус состоит из трех частей, последовательно развертывающих этот близкий мне лозунг. Вот они:

I	II	III
<u>— тайник</u> <u>рык</u>	<u>— булат</u> <u>неп</u>	<u>— за ре во</u> <u>трюм</u>
<u>анн</u>	<u>неп</u>	<u>трюм</u>
		<u>эт</u>
<u>— ркен</u>	<u>— ннна</u>	<u>— юрр юо</u>
<u>ратн</u>	<u>нсе у</u>	<u>о ио ре</u>
<u>— вйи</u>	<u>— аент</u>	<u>е ом</u>
<u>тне</u>	<u>апе о</u>	
<u>— рекк</u>	<u>аб у</u>	
<u>ррик</u>		
нй		

Читатель, который пожелает разгадать этот тройной (и весьма нелегкий) ребус, узнает в итоге, что

I II III

реактивный планетобус завоюет мир

Предлагаю далее читателю самостоятельно разгадать следующий ряд ребусов:

Ребус № 1

<u>— кризис</u> <u>этап</u>
<u>этап</u>
<u>эт</u>
<u>зи еи</u>
<u>ие ка</u>
<u>эсс ис</u>
<u>ээз ки</u>
<u>эп е е</u>

Ребус № 2

<u>— персик</u> <u>бал</u>
<u>сбпе</u>
<u>бкп</u>
<u>улри</u>
<u>упбс</u>
<u>еуук</u>
<u>епе и</u>
<u>рс р</u>

Ответы к этим ребусам см. в конце книги.

НАЙТИ ТРЕХЗНАЧНОЕ ЧИСЛО

Рассмотрим еще один арифметический ребус несколько иного рода. Искомое число состоит из трех разных цифр A, B, C . Запишем его условно так: ABC , помня, что C — цифра единиц, B — десятков, A — сотен. Надо найти это число, если известно, что

$$\begin{array}{r}
 \times ABC \\
 BAC \\
 \hline
 *** \\
 + **A \\
 ***B \\
 \hline

 \end{array}$$

Звездочками обозначены неизвестные цифры.

Ведем поиски в таком порядке.

Прежде всего устанавливаем, что ни A , ни B , ни C не есть 0. Мы уверены в этом, потому что иначе не могли бы получиться три строки частных произведений.

Замечаем далее, что

произведение $C \times A$ оканчивается на A ,
произведение $C \times B$ оканчивается на B ;

выводим отсюда, что C может быть либо 1, либо 6. Для единицы соображение наше очевидно; для 6 оно поясняется примерами:

$$6 \times 2 = 12; \quad 6 \times 8 = 48; \quad 6 \times 4 = 24.$$

Другие цифры подобным свойством не обладают. Но если бы C было 1, то первое частное произведение состояло бы не из четырех цифр, а только из трех. Остается, следовательно, всего одна возможность, $C=6$.

Мы сейчас убедились, что $C=6$ и что, следовательно, A и B могут быть только или 2, или 4, или 8. Но так как второе частное произведение состоит лишь из трех цифр, то A не может быть ни 4, ни 8. Значит, $A=2$.

Для B остаются две возможности: $B=4$ и $B=8$. Если бы при $A=2$ цифра B равнялась 4, то последнее частное произведение было бы трехзначное, а не четырехзначное. Следовательно, $B=8$.

Итак, имеем: $A=2$, $B=8$, $C=6$. Искомое число 286, а все умножение раскрывается в таком виде:

$$\begin{array}{r} \times 286 \\ 826 \\ \hline 1716 \\ 572 \\ 2288 \\ \hline 236236 \end{array}$$

ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМА В КНИЖНЫХ ШКАФАХ

Десятичная система счисления находит себе, между прочим, применение там, где, казалось бы, этого и ожидать нельзя, именно — в библиотеках, при распределении книг по отделам.

В некоторых массовых библиотеках употребляется такая система классификации книг, при которой одна и та же книга имеет всюду одинаковое числовое обозначение («шифр»). Система эта называется десятичной и избавляет читателя от необходимости справляться в каталоге при требовании книг того или иного отдела.

Система несложна и очень удобна. Сущность ее в том, что каждая отрасль знания имеет свое числовое обозначение, притом такое, что цифровой его состав сам говорит о месте, занимаемом данной отраслью в общей системе знания.

Все книги распределяются, прежде всего, по десяти главным отделам, которые обозначаются цифрами от 0 до 9:

0. Сочинения общего характера.
1. Философия.
2. История религии и антирелигиозная литература.
3. Общественные науки. Право.
4. Филология. Языки.
5. Физико-математические и естественные науки.
6. Прикладные науки (медицина, техника, сельское хозяйство и т. п.).
7. Изящные искусства.
8. Литература.
9. История, география, биографии.

Первая цифра шифра (т. е. числового обозначения) по этой системе прямо указывает, к какому из сейчас перечисленных отделов книга относится. Каждая книга по философии имеет шифр, начинающийся с 1, по математике — с 5, по технике — с 6 и т. п. Если шифр начинается, например, с цифры 4, то, не раскрывая даже книги, вы знаете заранее, что она относится к отделу языкознания.

Далее, каждый из перечисленных отделов в свою очередь подразделяется на 10 подотделов, которые тоже обозначаются цифрами от 0 до 9; цифры эти пишутся в шифре на втором месте. Например, отдел 5-й, содержащий физико-математические и естественнонаучные книги, подразделяется на такие подотделы:

50. Общие сочинения по физико-математическим и естественным наукам.
51. Математика.
52. Астрономия. Геодезия.
53. Физика. Теоретическая механика.
54. Химия. Минералогия.
55. Геология.

56. Палеонтология.
57. Биология. Антропология.
58. Ботаника.
59. Зоология.

Сходным образом разбиваются и другие отделы. Например, в отделе прикладных наук (6) подотдел медицины имеет

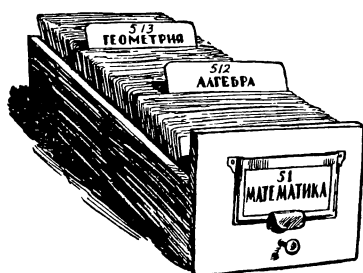


Рис. 12. Ящикек карточного библиотечного каталога, составленного по десятичной системе.

обозначение 61; сельского хозяйства — 63, торговли и путей сообщения — 65, химической промышленности и технологии — 66 и т. п. Таким же образом в 9-м отделе все книги по географии получают обозначение 91 и т. п.

Присоединяя к двум первым цифрам третью, характеризуют содержание книги еще точнее, указывая, к какому разряду

данного подотдела она относится (см. рис. 12). Например, в подотделе математики (51) присоединение на третьем месте цифры 1 указывает, что книга относится к арифметике (511), шифр 512 обозначает книги по алгебре, 513 — по геометрии. В отделе физики (53) книги по электричеству имеют шифр 537, по оптике — 535, по теплоте — 536.

В библиотеке, устроенной по десятичной системе, отыскание нужной книги до крайности упрощается. Если вы интересуетесь геометрией, вы прямо идете к шкафам, где шифры начинаются с 5, отыскиваете тот шкаф, где хранятся книги с шифром 51 . . . , и пересматриваете в нем только те полки, где стоят книги с шифром 513 . . . Здесь собраны все книги по геометрии, имеющиеся в данной библиотеке.

Как бы обширна ни была библиотека, никогда не может случиться, чтобы какая-либо книга выпала из этой системы обозначений.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЗНАКИ И НАЗВАНИЯ У РАЗНЫХ НАРОДОВ

Принято думать, что арифметические знаки до известной степени интернациональны, что они одинаковы у всех народов европейской культуры. Это верно лишь по отно-

шению к большинству знаков, но не ко всем. Знаки + и —, знаки × и : употребляются в одинаковом смысле и немцами, и французами, и англичанами. Но точка как знак умножения применяется не вполне тождественно разными народами. Одни пишут 7.8, другие — 7·8, поднимая точку на середину высоты цифры. То же приходится сказать о знаке дробности, т. е. о знаке, отделяющем десятичную дробь от целого числа. Одни пишут, как мы, 4,5, другие 4.5, третьи 4·5, помещая точку выше середины. Англичане и американцы совсем опускают нуль перед десятичной дробью, чего на континенте Европы никто не делает. В американской книге вы встречаете такие обозначения, как .725, или .725, или даже ,725 вместо 0,725.

Расчленение числа на классы обозначается также не однообразно. В одних странах разделяют классы точками (15.000.000), в других — запятыми (15,000,000). У нас привился разумный обычай не помещать между классами никакого знака, а оставлять лишь пробел (15 000 000).

Поучительно проследить за тем, как меняется способ наименования одного и того же числа с переходом от одного языка к другому. Число 18, например, мы называем «восемнадцать», т. е. произносим сначала единицы (8), потом десятки (10). В такой же последовательности читает это число немец: achtzehn, т. е. 8-10. Но француз произносит иначе: 10-8 (dix-huit). Насколько разнообразны у разных народов способы наименования того же числа 18, показывает следующее извлечение из таблицы, составленной одним исследователем:

по-русски	8-10
по-немецки	8-10
по-французски	10-8
по-армянски	10 + 8
по-гречески	8 + 10
по-латыни	без 2 20
по-новозеландски	11 + 7
по-валлийски	3 + 5-10
по-литовски	8 сверх 10
по-айноски	10 — 2 сверх 10
по-коряцки	3-5 сверх 10

Курьезно наименование для того же числа 18 у одного гренландского племени: «с другой ноги 3». При всей своей

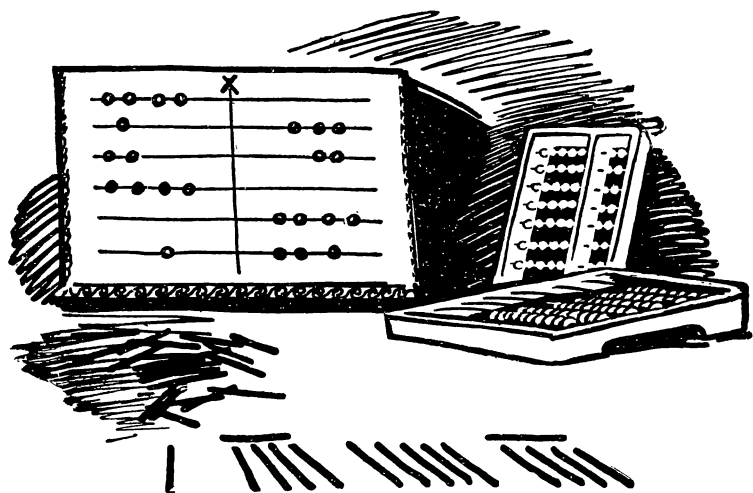
необычности это название естественно объясняется способом счета по пальцам рук и ног. Раскроем его смысл:

число	пальцев	обеих рук	10
»	»	одной ноги	5
»	»	другой »	3
				<hr/>
				Итого...18

Сходным образом объясняется карибское наименование числа 18: «все мои руки, 3, моя рука» (т. е. $10+3+5$).

Арифметические курьезы

$$100 = \left\{ \begin{array}{l} 1+2+3+4+5+6+7+8 \times 9 \\ 1+2 \times 3+4 \times 5+6+7+8 \times 9 \\ 1+2 \times 3+4+5+6+7+8+9 \\ 1 \times 2+3+4+5+6+7+8+9 \end{array} \right.$$



ГЛАВА ВТОРАЯ ДРЕВНИЙ АБАК И ЕГО ПОТОМКИ

ЧЕХОВСКАЯ ГОЛОВОЛОМКА

Припомним ту в своем роде знаменитую арифметическую задачу, которая так смутила семиклассника Зиберова из чеховского рассказа «Репетитор».

«Купец купил 138 аршин черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее сукно стоило 5 руб. за аршин, а черное 3 руб.?»

С тонким юмором описывает Чехов, как беспомощно трудились над этой задачей и семиклассник-репетитор, и его ученик, 12-летний Петя, пока не выручил их Петин отец Удодов:

«Петя повторяет задачу и тотчас же, ни слова не говоря, начинает делить 540 на 138.

— Для чего же это вы делите? Пойдите! Впрочем, так... продолжайте. Остаток получается? Здесь не может быть остатка. Дайте-ка, я разделю!

Зиберов (репетитор) делит, получает 3 с остатком и быстро стирает.

«Странно...— думает он, ероша волосы и краснея. — Как же она решается? Гм!.. Это задача на неопределенные уравнения, а вовсе не арифметическая...»

Учитель глядит в ответы и видит 75 и 63.

«Гм!.. странно... Сложить 5 и 3, а потом делить 540 на 8? Так, что ли? Нет, не то».

— Решайте же! — говорит он Пете.

— Ну, чего думаешь? Задача-то ведь пустяковая! — говорит Удодов Пете. — Экий ты дурак, братец! Решите уж вы ему, Егор Алексеич.

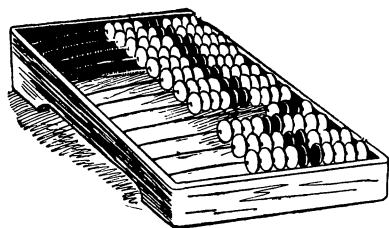


Рис. 13. Русские счёты.

Егор Алексеич (репетитор) берет в руку грифель и начинает решать. Он заикается, краснеет, бледнеет.

— Эта задача, собственно говоря, алгебраическая, — говорит он. — Ее с иксом и игреком решить можно. Впрочем, можно

и так решить. Я вот разделил... понимаете? Теперь вот надо вычесть... понимаете? Или вот что... Решите мне эту задачу сами к завтраму... Подумайте...

Петя ехидно улыбается. Удодов тоже улыбается. Оба они понимают замешательство учителя. Ученик VII класса еще пуще конфузится, встает и начинает ходить из угла в угол.

— И без алгебры решить можно, — говорит Удодов, протягивая руку к счетам и вздыхая. — Вот, извольте видеть...

Он щелкает на счетах, и у него получается 75 и 63, что и нужно было.

— Вот-с... по-нашему, по-неученому».

Эта история с задачей, заставляющая нас смеяться над конфузом злосчастного репетитора, задает нам сама три новые задачи, а именно:

1. Как намеревался репетитор решить задачу алгебраически?

2. Как должен был решить ее Петя?

3. Как решил ее отец Пети на счетах «по-неученому»?

На первые два вопроса, вероятно, без труда ответят если не все, то весьма многие читатели нашей книжки. Третий вопрос не так прост. Но рассмотрим их по порядку.

1. Семиклассник-репетитор готов был решать задачу «с иксом и игреком», будучи уверен, что задача, «собственно говоря, алгебраическая». И он, надо думать, легко справился бы с ней, прибегнув к помощи системы уравнений (только не неопределенных, как ему казалось). Составить два уравнения с двумя неизвестными для данной задачи очень трудно; вот они:

$$\begin{aligned}x + y &= 138, \\ 5x + 3y &= 540,\end{aligned}$$

где x — число аршин синего, а y — черного сукна.

2. Однако задача легко решается и арифметически. Если бы вам пришлось решать ее, вы начали бы с предположения, что все купленное сукно было синее, тогда за партию в 138 аршин синего сукна пришлось бы уплатить $5 \times 138 = 690$ рублей; это на $690 - 540 = 150$ рублей больше того, что было заплачено в действительности. Разница в 150 рублей указывает, что в партии имелось и более дешевое черное сукно по 3 рубля аршин. Дешевого сукна было столько, что из двухрублевой разницы на каждом аршине составилось 150 рублей: очевидно, что число аршин черного сукна определится, если разделить 150 на 2. Получаем ответ — 75; вычтя эти 75 аршин из общего числа 138 аршин, узнаем, сколько было синего сукна: $138 - 75 = 63$. Так и должен был решать задачу Петя.

3. На очереди третий вопрос: как решил задачу Удодов старший?

В рассказе говорится очень кратко: «Он щелкает на счетах, и у него получается 75 и 63, что и нужно было».

В чем однако состояло это «щелканье на счетах»?

Каков способ решения задачи с помощью счетов?

Разгадка такова: злополучная задача решается на счетах тем же приемом, что и на бумаге, — теми же арифметическими действиями. Но выполнение их упрощается, благодаря преимуществам, которые наши русские счета представляют всякому, умеющему с ними обращаться. Очевидно, «отставной губернский секретарь» Удодов хорошо умел считать на счетах, потому что их косточки быстро, без помощи алгебры, открыли ему то, чего репетитор-семиклассник добивался узнать «с иксом и игреком». Проследим же, какие действия должен был проделать на счетах Петин отец.

Прежде всего ему нужно было, как мы знаем, умножить 138 на 5. Для этого он, по правилам действий на счетах умножил сначала 138 на 10, т. е. просто перенес 138 одним рядом выше (см. рис. 14, б), а затем разделил это число пополам опять-таки на счетах же. Деление начинают снизу: откидывают половину косточек, отложенных на каждой проволоке; если число косточек на данной проволоке нечетное, то выходят из затруднения, «раздробляя» одну косточку этой проволоки на 10 нижних.

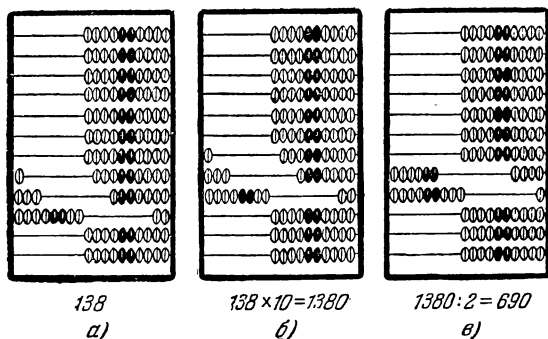


Рис. 14. Он умножил сначала 138 на 10, т. е. просто перенес на счетах 138 одним рядом выше, а затем на счетах же разделил число пополам.

В нашем, например, случае делят 1380 пополам так: на нижней проволоке, где отложено 8 косточек, откидывают 4 косточки (4 десятка), на средней проволоке из 3 косточек откидывают 1, а оставшуюся 1 косточку заменяют мысленно 10-ю нижними и делят пополам, добавляя 5 десятков к косточкам нижней; на верхней проволоке раздробляют одну косточку, прибавляя 5 сотен к косточкам средней проволоки. В результате на верхней проволоке совсем не остается косточек, на средней $1 + 5 = 6$ сотен, на нижней $4 + 5 = 9$ десятков (рис. 14, в). Итого 690 единиц. Выполняется все это быстро, автоматически.

Далее Удодову старшему нужно было из 690 вычесть 540. Как проделывается это на счетах, всем известно.

Наконец, полученную разность 150 оставалось разделить пополам: Удодов откинул из 5 косточек (десятков) 2, отдав 5 единиц нижнему ряду косточек; потом из 1 косточки

на проволоке сотен отдал 5 десятков нижнему ряду: получилось 7 десятков и 5 единиц, т. е. 75.

Все эти простые действия выполняются на счетах, конечно, гораздо скорее, чем тут описано.

КАК СЧИТАЛИ В ГЛУБОКОЙ ДРЕВНОСТИ

Люди научились считать очень давно. Первым природным инструментом счета были пальцы рук. Отсюда берет начало десятичная система счисления у многих древних народов. Надо сказать, что пальцевый счет долго служил практическим средством для многих народов, в том числе и

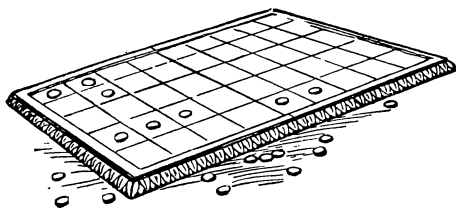


Рис. 15. Древние употребляли при вычислениях счетный прибор «абак».

для древних греков. Не думайте, что на пальцах можно считать только до десяти. Из дошедших до нас памятников древнегреческой литературы мы узнаем, что в V и IV веках до нашей эры пальцевый счет был очень распространен и мог переходить за тысячу.

Позднее у египтян, греков, римлян, китайцев и у некоторых других древних народов появляется счетный прибор, который по своей идее напоминает наши счеты и известен в древности под названием «абак». Вид его у разных народов был различным. Так, греческий абак представлял собой доску (стол), разграфленную на полосы (рис. 15), по которым передвигали особые шашки, игравшие роль косточек на наших счетах. Римский абак имел форму медной доски с желобами (прорезами), в которых передвигались кнопки.

В древнем Китае для изображения чисел на счетной доске применялись счетные палочки длиной в 10 см и толщиной в 1 см. Уже около 150 г. нашей эры в Китае были довольно широко известны приемы выполнения на счетной доске четырех арифметических действий.

Существовало два способа изображения цифр на китайской счетной доске, они указаны в таблице на рис. 16.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1-й способ	I	II	III	IIII	IIII I	IIII II	IIII III	IIII IIII	IIII IIII I
2-й способ	—	==	===	===	===	⊥	⊥	⊥	⊥

Рис. 16. Два способа изображения цифр на китайской счетной доске.

При записи числа на счетной доске обычно поступали так: первую его цифру (считая справа налево) изображали первым способом, вторую цифру — вторым способом, третью цифру снова изображали первым способом, а четвертую — вторым способом и т. д. Другими словами, все цифры числа, стоящие на нечетных местах (считая справа) изображали первым способом, а цифры на четных местах — вторым способом. Например, числа 78 639, 4576 и 1287 были бы изображены на счетной доске так, как показано на рис. 17.

$$\overline{\text{II}} \perp \overline{\text{T}} \equiv \overline{\text{IIII}} = 78639$$

$$\equiv \overline{\text{IIII}} \perp \overline{\text{T}} = 4576$$

$$- \equiv \perp \overline{\text{II}} = 1287$$

Рис. 17. Примеры изображения некоторых чисел на китайской счетной доске.

Познакомимся вкратце с тем, как на такой счетной доске производили действия сложения и умножения.

Сложение. Пусть требуется найти сумму двух чисел 9876 и 5647. Изобразим их сначала на счетной доске:

$$\begin{array}{cccccccc} \perp & \overline{\text{IIII}} & \perp & \overline{\text{T}} & & \equiv & \overline{\text{T}} & \equiv \overline{\text{II}} \\ \equiv & & & & & & & \\ \hline 9 & 8 & 7 & 6 & + & 5 & 6 & 4 & 7 \end{array}$$

Сложение выполняли, начиная с высших разрядов, т. е. слева.

1-й шаг: складываем тысячи

$$9 + 5 = 14.$$

Изображаем это так:

$$\begin{array}{cccc} \perp & \equiv & \overline{\text{IIII}} & \perp & \overline{\text{T}} \\ \hline \perp & \equiv & \overline{\text{IIII}} & \perp & \overline{\text{T}} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \overline{\text{T}} & \equiv & \overline{\text{II}} \quad (2) \\ \equiv & \overline{\text{T}} & \equiv \overline{\text{II}} \quad (1) \end{array}$$

т. е. над слагаемыми составляем вторую строку, причем слева над цифрой 9 пишем 14 так, чтобы цифра 4 была строго над цифрой 9, а остальную часть первого слагаемого переписываем без изменений. Над вторым слагаемым мы повторяем все его цифры, кроме уже использованной цифры 5.

2-й шаг: складываем сотни

$$8 + 6 = 14,$$

причем, так как у нас получилась при сложении одна единица более высокого разряда, то мы ее прибавляем к полученной ранее сумме,

$$\begin{array}{r} + 14 \\ 14 \\ \hline 154 \end{array}$$

Таким образом, 3-я строка будет выглядеть так (первые две строки повторяем без изменений):

$$\begin{array}{r} \begin{array}{cccc} | \equiv & ||| & \underline{1} & \top \\ | \equiv & \top & \underline{1} & \top \\ \hline \underline{1} & ||| & \underline{1} & \top \end{array} & \begin{array}{ccc} & \equiv & \top \\ \top & \equiv & \top \\ \equiv & \top & \equiv \end{array} \end{array} \begin{array}{l} (3) \\ (2) \\ (1) \end{array}$$

Слева в третьей строке у нас написано 154 и затем повторены две последние цифры (76) первого слагаемого; справа повторены две последние цифры (47) второго слагаемого (остальные его цифры уже использованы).

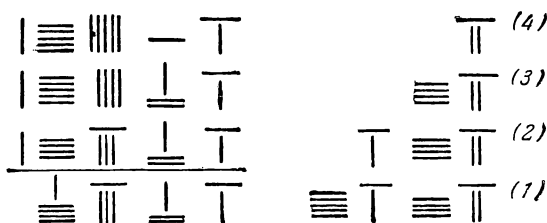
3-й шаг: складываем десятки

$$7 + 4 = 11,$$

следовательно, вместе с предыдущим результатом получим

$$\begin{array}{r} + 154 \\ 11 \\ \hline 1551 \end{array}$$

Это число 1551 изображаем слева в четвертой строке:



4-й шаг: теперь осталось сложить единицы

$$6 + 7 = 13,$$

и сумма заданных двух чисел найдена; она равна 15 523:

$$\begin{array}{r} + 1551 \\ 13 \\ \hline 15523 \end{array}$$

Полученное число 15 523 записано в пятой строке левого столбца, и схема сложения окончательно имеет вид, изображенный на рис. 18.

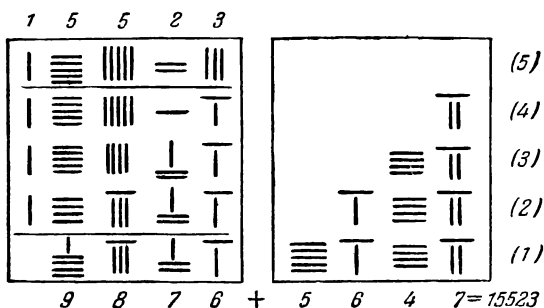


Рис. 18. По такой схеме на китайской счетной доске производили бы сложение двух чисел 9876 и 5647.

У м н о ж е н и е. На счетной доске в древнем Китае умножение начинали с цифр старших разрядов, постепенно переходя к цифрам младших разрядов. При этом уже в I веке нашей эры пользовались таблицей умножения.

Допустим, что требуется умножить 346 на 27. Процесс умножения на счетной доске выглядел бы в наших обозначениях примерно так:

$$\begin{array}{r}
 \times 346 \\
 27 \\
 \hline
 6 \\
 21 \\
 8 \\
 28 \\
 12 \\
 42 \\
 \hline
 9342
 \end{array}$$

Мы сначала 3 умножили на 2 и получили 6 — цифру наивысшего разряда произведения (число тысяч). После этого мы 3 умножили на 7, а 4 на 2; полученные числа сотен 21 и 8 подписали под цифрой 6 с учетом разрядов, как показано. Затем умножили 4 на 7, а 6 на 2 (это дало нам числа десятков 28 и 12) и, наконец, 6 умножили на 7 (получили 42 единицы). Все эти числа подписали, как показано выше, и сложили. Окончательно получили произведение 9342.

Счетная доска и способы вычисления на ней (о способах сложения и умножения мы рассказали) сохранились в Китае вплоть до XIII века. К этому времени стали употреблять нуль, который с помощью счетных палочек изображали в виде квадрата \square .

В XIII веке на счетной доске изображали и десятичные дроби. Например, число 106 368, 6312 было бы изображено примерно так, как показано на рис. 19.

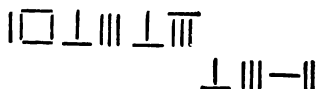


Рис. 19. Примерное изображение на китайской счетной доске смешанного числа 106 368, 6312.

В XV веке в Китае и в Японии для производства четырех арифметических действий применяли уже семикосточ-

ковые счеты (в Китае они назывались «суан-пан» ¹⁾, а в Японии — «соробан», см. рис. 20). Эти своеобразные вычислительные приборы сохранились до наших дней и пользуются большой популярностью.

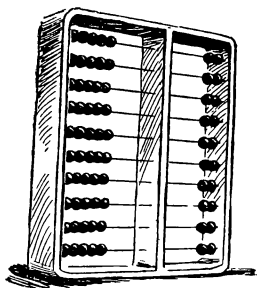


Рис. 20. Семикосточковые счеты, распространенные в Китае и Японии.

Вот, например, как отзывался когда-то о соробане один японский ученый: «Несмотря на свою древность, соробан превосходит все современные счетные приборы легкостью обращения с ним, простотой устройства и дешевизной».

РУССКИЕ СЧЕТЫ

Есть много полезных вещей, которые мы не ценим только потому, что, находясь постоянно у нас под руками, они превратились в слишком обыденный предмет домашнего обихода. К числу таких недостаточно ценимых вещей принадлежат и наши конторские счеты — русский народный счетный прибор, представляющий собою видоизменение знаменитого «абака», или «счетной доски», наших отдаленных предков.

Между тем Запад почти не знает счетов, и только в начальных школах имеются огромные счеты — наглядное классное пособие при обучении нумерации.

¹⁾ Счеты суан-пан изготавливаются всевозможных размеров, до самых миниатюрных (у меня имеется китайский суан-пан — брелок в 17 мм длины и 8 мм ширины). Употребляются также и шестикосточковые счеты: пять косточек по одну сторону планки, одна — по другую. (На имеющемся у меня образчике таких счетов 21 ряд косточек.)

Мы вправе гордиться нашими конторскими счетами, так как при изумительной простоте устройства они по достигаемым на них результатам могут соперничать в некоторых отношениях даже со счетными машинами. В умелых руках этот нехитрый прибор делает просто настоящие чудеса. Один специалист, работавший до революции в крупной русской фирме по продаже счетных машин, рассказывал мне, что ему не раз приходилось изумлять русскими счетами иностранцев, привозивших образцы сложных счетных механизмов. Он устраивал состязания между двумя счетчиками, из которых один работал на дорогой заграничной «аддиционной» машине (т. е. машине для сложения), другой же пользовался обыкновенными счетами. И случалось, что последний — правда, большой мастер своего дела — брал верх над обладателем заморской диковинки в быстроте и точности вычислений. Бывало и так, что иностранец, пораженный быстротой работы на счетах, сразу же сдавался и укладывал свою машину в чемодан, не надеясь продать в России ни одного экземпляра.

Правда, на русских счетах нельзя производить всех действий, которые выполняются машинами. Но во многом — например, в сложении и вычитании — счета могут соперничать со сложными приборами. Впрочем, в искусных руках умножение и деление также значительно ускоряются на счетах, если знать приемы выполнения этих действий.

Познакомимся с некоторыми из них.

УМНОЖЕНИЕ НА СЧЕТАХ

Вот несколько приемов, пользуясь которыми всякий умеющий быстро с к л а д ы в а т ь на счетах сможет правильно выполнять встречающиеся на практике примеры у м н о ж е н и я.

Умножение на 2 и на 3 заменяется двукратным и троекратным сложением.

При умножении на 4 умножают сначала на 2 и складывают этот результат с самим собою.

Умножение числа на 5 выполняется на счетах так: переносят все число одной проволокой выше, т. е. умножают его на 10, а затем делят это 10-кратное число пополам (как делить на 2 с помощью счетов, мы уже объясняли выше, на стр. 38).

Вместо умножения на 6 умножают на 5 и прибавляют умножаемое. Вместо умножения на 7 множат на 10 и отнимают умножаемое три раза.

Умножение на 8 заменяют умножением на 10 минус два.

Точно так же множат на 9: заменяют умножением на 10 минус один.

При умножении на 10 переносят, как мы уже сказали, все число одной проволокой выше.

Читатель, вероятно, уже сам сообразит, как надо поступать при умножении на числа больше 10 и какого рода замены тут окажутся наиболее удобными. Множитель 11 надо, конечно, заменить $10+1$. Множитель 12 заменяют $10+2$, или практически $2+10$, т. е. сначала откладывают удвоенное число, а затем прибавляют удесятеренное. Множитель 13 заменяется $10+3$ и т. д.

Рассмотрим несколько особых случаев для множителей первой сотни:

$20 = 10 \times 2$	$32 = 22 + 10$
$22 = 11 \times 2$	$42 = 22 + 20$
$25 = (100:2):2$	$43 = 33 + 10$
$26 = 25 + 1$	$45 = 50 - 5$
$27 = 30 - 3$	$63 = 33 + 30$ и т. д.

Легко видеть, между прочим, что с помощью счетов очень удобно умножать на такие числа, как на 22, 33, 44, 55 и т. п.; поэтому надо стремиться при разбивке множителей пользоваться подобными числами с одинаковыми цифрами.

К сходным приемам прибегают и при умножении на числа больше 100. Если подобные искусственные приемы утомительны, мы всегда, конечно, можем умножить с помощью счетов по общему правилу, умножая каждую цифру множителя и записывая частные произведения — это все же дает некоторое сокращение времени.

ДЕЛЕНИЕ НА СЧЕТАХ

Выполнять с помощью конторских счетов деление гораздо труднее, чем умножать; для этого нужно запомнить целый ряд особых приемов, подчас довольно замысловатых. Интересующимся ими придется обратиться к специальным руководствам. Здесь укажу лишь ради примера удобные приемы деления с помощью счетов на числа первого десятка

(кроме числа 7, способ деления на которое чересчур сложен).

Как делить на 2, мы уже знаем (стр. 38), способ этот очень прост.

Гораздо сложнее прием деления на 3: он состоит в замене деления умножением на бесконечную периодическую дробь $0,333 \dots$ (известно, что $0,333 \dots = \frac{1}{3}$). Умножать с помощью счетов на 3 мы умеем; уменьшить в 10 раз тоже несложно: надо лишь переносить делимое одной проволокой ниже. После недолгого упражнения этот прием деления на 3, на первый взгляд длинноватый, оказывается довольно удобным на практике.

Деление на 4, конечно, заменяется двукратным делением на 2.

Еще проще деление на 5: его заменяют делением на 10 и удвоением результата.

На 6 делят в два приема: сначала делят на 2, потом полученное делят на 3.

Деление на 7, как мы уже сказали, выполняется с помощью счетов чересчур сложно, а потому здесь излагать его не будем.

На 8 делят в три приема: сначала на 2, потом полученное вновь на 2 и затем еще раз на 2.

Очень интересен прием деления на 9. Он основан на том, что $\frac{1}{9} = 0,1111 \dots$. Отсюда ясно, что вместо деления на 9 можно последовательно складывать $0,1$ делимого $+ 0,01$ его и т. д. ¹⁾.

Всего проще, как видим, делить на 2, 10 и 5 и, конечно, на такие кратные им числа, как 4, 8, 16, 20, 25, 40, 50, 75, 80, 100. Эти случаи деления не представляют трудности и для малоопытного счетчика.

ОТГОЛОСКИ СТАРИНЫ

С отдаленными предками наших конторских счетов связаны некоторые пережитки старины в языке и обычаях. Мало кто подозревает, например, что собственно мы делаем, завязывая иногда «для памяти» узелок на носовом платке. Мы повторяем то, что некогда с большим смыслом делали наши предки, «записывая» таким образом итог счета на

¹⁾ Этот прием полезен и для устного деления на 9.

шнурках. Ряд ремней или веревок с завязанными на них узлами представлял собой некогда счетный прибор (рис. 21), в принципе аналогичный нашим счетам. Это — перуанский «веревочный абак», так называемый «квипос». Однократно завязанный узел на веревке означал 10, двукратно — 100, троекратно — 1000 и т. д.

С абаком же связаны и такие распространенные теперь слова, как «банк» и «чек». «Банк» по-немецки означает скамья. Что же общего между финансовым учреждением —

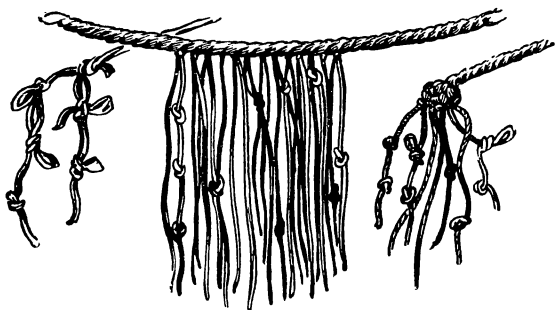


Рис. 21. Счетный прибор древних перуанцев «квипос».

«банком» в современном смысле слова — и скамьей? Оказывается, здесь далеко не простое совпадение названий. Абак в форме скамьи был широко распространен в торговых кругах Германии в XV—XVI веках; каждая меняльная лавка или банковская контора прежде всего характеризовалась присутствием «счетной скамьи» — естественно, что скамья стала синонимом банка.

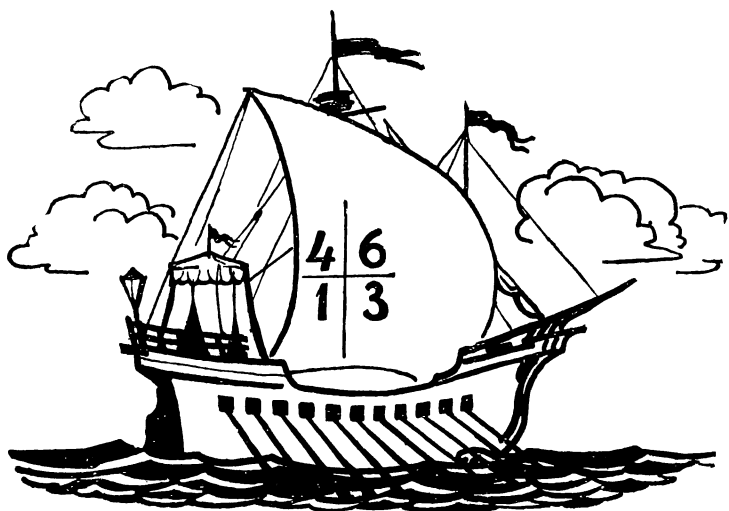
Более косвенное отношение к абаку имеет слово «чек». Оно английского происхождения и производится от глагола «чекер» (checker) — графить; «чекеред» (графленый) называли разграфленную в форме абак кожаную салфетку, которую в XVI—XVII веках английские коммерсанты носили с собою в свернутом виде и, в случае надобности произвести подсчет, развертывали на столе. Бланки для расчетов графились по образцу этих свертывающихся абак, и неудивительно, что на них перенесено было, в сокращенном виде, самое название этих счетных приборов: от слова «чекеред» произошло слово «чек».

Любопытно, откуда произошло выражение «остаться на бобах», которое мы применяем теперь к человеку, проиграв-

шему все свои деньги. Оно также относится к тому времени, когда все денежные расчеты производились на абакѣ, на счетном столѣ или скамьѣ с помощью б о б о в, заменявших косточки наших счетов. «Один считает на камешках, другой — на бобах», — читаем у Кампанеллы в «Государстве Солнца» (1602). Человек, проигравший свои деньги, оставался с одними бобами, выражавшими сумму его проигрыша, — отсюда и соответствующий оборот речи.

Арифметические курьезы

$$100 = \left\{ \begin{array}{l} 12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9 \\ 12 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 89 \\ 123 + 4 - 5 + 67 - 89 \end{array} \right.$$



ГЛАВА ТРЕТЬЯ НЕМНОГО ИСТОРИИ

«ТРУДНОЕ ДЕЛО — ДЕЛЕНИЕ»

Зажигая привычным движением спичку, мы иной раз еще задумываемся над тем, сколько трудов стоило добытие огня нашим предкам, даже не очень отдаленным. Но мало кто подозревает, что нынешние способы выполнения арифметических действий тоже не всегда были так просты и удобны, так прямо и быстро приводили к результату.

Предки наши пользовались гораздо более громоздкими и медленными приемами. И если бы школьник XX века мог перенестись за четыре, за три века назад, он поразил бы наших предков быстротой и безошибочностью своих арифметических выкладок. Молва о нем облетела бы окрестные школы и монастыри, затмив славу искуснейших счетчиков той эпохи, и со всех сторон приезжали бы учиться у нового великого мастера счетного дела.

Особенно сложны и трудны были в старину действия умножения и деления — последнее всего больше. «Умножение — мое мученье, а с делением — беда», — говорили в старину. Тогда не существовало еще, как теперь, одного выработанного практикой приема для каждого действия. Напротив, в ходу была одновременно чуть не дюжина различных способов умножения и деления — приемы один другого запутаннее, твердо запомнить которые не в силах был человек средних способностей. Каждый учитель счетного дела держался своего излюбленного приема, каждый «магистр деления» (были такие специалисты) восхвалял собственный способ выполнения этого действия.

В книге В. Беллюстина «Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики» (1914) изложено 27 способов умножения, причем автор замечает: «весьма возможно, что есть и еще (способы), скрытые в тайниках книгохранилищ, разбросанные в многочисленных, главным образом, рукописных сборниках». И все эти приемы умножения — «шахматные или органчиком», «загибанием», «по частям или в разрыв», «крестиком», «решеткой», «задом наперед», «ромбом», «треугольником», «кубком или чашей», «алмазом» и прочие ¹⁾, а также все способы деления, носившие не менее затейливые наименования, соперничали друг с другом в громоздкости и сложности. Усваивались они с большим трудом и лишь после продолжительной практики. Признавалось даже, что для овладения искусством быстрого и безошибочного умножения и деления многозначных чисел нужно особое природное дарование, исключительные способности; рядовым людям премудрость эта недоступна. «Трудное дело — деление» (*dura cosa e la partita*), — гласила старинная итальянская поговорка; оно и в самом деле было трудно, если принять во внимание утомительные методы, какими выполнялось тогда это действие. Нужды нет, что способы эти носили подчас довольно игривые названия: под веселым названием скрывался длиннейший ряд запутанных манипуляций. В XVI веке кратчайшим и удобнейшим способом считалось, например, деление «лодкой или галерой». Знаменитый итальянский математик того времени Николай Тарталья (XVI век) в своем обширном учебнике арифметики писал об этом способе следующее:

¹⁾ Перечисленные примеры умножения указаны в старинной «Арифметике» Николая Тарталья. Наш современный способ умножения описывается там под названием «шахматного».

[illegible]

красиво выглядит; галера получается иной раз хорошо отделанная и снабженная всеми принадлежностями — выкладывается из чисел так, что она действительно представляется в виде галеры с кормою и носом, мачтою, парусами и веслами».

¹⁾ Венеция и некоторые другие государства Италии в XIV—XVI столетиях вели обширную морскую торговлю, и потому в этих странах приемы счета были, ради торговых надобностей, разработаны раньше, чем в других. Лучшие труды по арифметике появились в Венеции. Многие итальянские термины торговой арифметики сохранились еще в настоящее время.

как «самый изящный, самый легкий, самый верный, самый употребительный и самый общий из существующих, пригодный для деления всех возможных чисел», я не решаюсь его изложить здесь из опасения, что даже терпеливый читатель закроет книгу в этом скучном месте и не станет

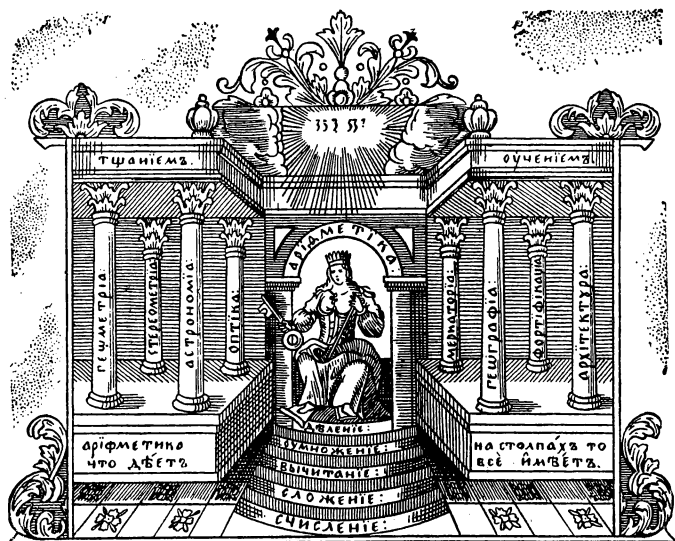


Рис. 23. Заставка из «Арифметики» Магницкого (изд. 1703 г.). Рисунок изображает «храм Мудрости». Мудрость сидит на престоле, на ступенях которого поименованы арифметические действия. На колоннах перечислены науки, в которых арифметика находит себе применение: геометрия, стереометрия, астрономия, оптика (знания, добываемые «тщанием»), меркатория (т. е. картография), география, фортификация, архитектура (знания, добываемые «учением»). Надпись внизу поясняет: «арифметика что деет на столпах, то все имеет».

читать дальше. Между тем этот утомительный способ действительно был самым лучшим в ту эпоху. У нас он употреблялся до середины XVIII века: в «Арифметике» Леонтия Магницкого¹⁾ он описан в числе шести предлагаемых там

¹⁾ Старинный русский учебник математики, охватывающий все ее отделы, известные в ту эпоху (включая и сведения из мореходной астрономии). Это одна из тех двух книг, которые Ломоносов назвал «вратами своей учености». Подробное заглавие ее таково:

«Арифметика, сиречь наука числительная, повелением царя Петра Алексеевича в великом граде Москве типографским тиснением ради обучения мудролюбивых российских отроков и всякого чина и возраста людей на свет произведена в лето от рождества бога слова 1703».

способов (из которых ни один не похож на современный) и особенно рекомендуется автором; на протяжении своей объемистой книги — 640 страниц большого формата — Магницкий пользуется исключительно «способом галеры», не употребляя, впрочем, этого наименования.

В заключение покажем читателю эту числовую «галеру», воспользовавшись примером из упомянутой книги Тартальи:

	$\begin{array}{r l} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{array}$	
88		08
0999	09	199
1660	19	0860
88876	0876	08877
099994800000019948000000199994		
166666000000086660000000866666		
Делимое — 8888880000000888800000088888		
(88 — частное)		
Делитель ¹⁾ — 9999900000000999000000099999		
99999000000009990000000999		

Добравшись после утомительных трудов до желанного конца арифметического действия, предки наши считали необходимым непременно проверить этот в поте лица добытый итог. Громоздкие приемы вызывали недоверие к их результатам. На длинном, извилистом пути легче заблудиться, чем на прямой дороге современных приемов. Отсюда естественно возник старинный обычай проверить каждое выполняемое арифметическое действие — похвальное правило, которому не мешало бы и нам следовать.

Любимым приемом проверки был так называемый «способ девятки». Этот изящный прием нередко описывается и в некоторых современных арифметических учебниках.

Проверка девяткой основана на «правиле остатков», гласящем: остаток от деления суммы на какое-либо число равен сумме остатков от деления каждого слагаемого на то же число. Точно так же остаток произведения равен произведению остатков множителей. С другой стороны, известно также ²⁾, что при делении числа на 9 получается тот же остаток, что и при делении на 9 суммы цифр этого числа; на-

¹⁾ Последние две девятки приписаны к делителю в процессе деления.

²⁾ Выясняется попутно при выводе признака делимости на 9.

пример, 758 при делении на 9 дает остаток 2, и то же получается в остатке от деления $7+5+8$ на 9. Сопоставив оба указанных свойства, мы и приходим к приему проверки девяткой, т. е. делением на 9. Покажем на примере, в чем он состоит.

Пусть требуется проверить правильность сложения следующего столбца:

$$\begin{array}{r} 38932... \\ + 1096... \\ + 4710043... \\ + 589106... \\ \hline 5339177... \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \\ \hline 8 \end{array}$$

Составляем в уме сумму цифр каждого слагаемого, причем в получающихся попутно двузначных числах также складываем цифры (делается это в самом процессе сложения цифр), пока в конечном результате не получим однозначное число. Результаты эти (остатки от деления на 9) записываем, как показано на примере, рядом с соответствующим слагаемым. Складываем все остатки ($7+7+1+2=17$; $1+7=8$), получаем 8. Такова же должна быть сумма цифр итога (5339177), если действие выполнено верно: $5+3+3+9+1+7+7$, после всех упрощений, равно 8.

Проверка вычитания выполняется точно так же, если принять уменьшаемое за сумму, а вычитаемое и разность — за слагаемые. Например:

$$\begin{array}{r} 6913... \\ - 2587... \\ \hline 4326... \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 4 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$4+6=10; \quad 1+0=1.$$

Особенно удобен этот прием в применении к проверке действия умножения, как видно из следующего примера:

$$\begin{array}{r} \times 8713... \\ \times 264... \\ \hline 34852 \\ 52278 \\ 17426 \\ \hline 2300232... \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 1 \\ \times 3 \\ \hline 3 \end{array}$$

Если при такой проверке умножения обнаружена будет ошибочность результата, то, чтобы определить, где именно кроется ошибка, можно проверить способом девятки каждое частное произведение отдельно; а если здесь ошибки не окажется, остается проверить лишь с л о ж е н и е частных произведений.

Как по этому способу проверять деление? Если у нас случай деления без остатка, то делимое рассматривается как произведение делителя на частное. В случае же деления с остатком пользуются тем, что делимое = делителю \times частное + остаток.

Например:

$$16201387 : 4457 = 3635; \text{ остаток } 192$$

сумма цифр: $\underbrace{1}_{1} \quad \underbrace{2}_{2} \quad \underbrace{8}_{8} \quad \underbrace{3}_{3}$
 $2 \times 8 + 3 = 19; \quad 1 + 9 = 10; \quad 1 + 0 = 1.$

Привожу из «Арифметики» Магницкого предлагаемое там для проверки девяткой удобное расположение:

Д л я у м н о ж е н и я:

$$\begin{array}{r}
 \times 365 \\
 24 \\
 \hline
 1460 \\
 730 \\
 \hline
 8760
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 5 \\
 3 \text{ — } | \text{ — } 3 \\
 6 \\
 \hline
 30
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{«Сие 3 — | — 3 сему согласно, убо добре есть»}
 \end{array}$$

Д л я д е л е н и я:

$$\begin{array}{r}
 \text{Частного} \\
 8 \\
 \text{Делимого } 1 \text{ — } | \text{ — } 1 \text{ «Согласно добре делил»} \\
 \text{Делителя } \frac{2}{16} \\
 \\
 \text{Остатка } \frac{3}{1} \\
 \text{Всех}
 \end{array}$$

Подобная проверка действий, без сомнения, не оставляет желать лучшего в смысле быстроты и удобства. Нельзя сказать того же о ее надежности: ошибка может и ускользнуть от нее. Действительно, одну и ту же сумму цифр могут иметь разные числа; не только перестановка цифр, но иной раз даже и замена одних другими остаются при та-

кой проверке обнаруженными. Укрываются от контроля также лишние девятки и нули, потому что они не влияют на сумму цифр. Всецело полагаться поэтому на такой прием проверки было бы неосмотрительно. Предки наши сознавали это и не ограничивались одной лишь проверкой с помощью девятки, но производили еще дополнительную проверку — чаще всего с помощью семерки. Этот прием основан на том же «правиле остатков», но не так удобен, как способ девятки, потому что деление на 7 приходится выполнять полностью, чтобы найти остатки (а при этом возможны ошибки в действиях самой проверки).

Две проверки — девяткой и семеркой — являются уже гораздо более надежным контролем: что ускользнет от одной, будет уловлено другою. Ошибка не обнаружится лишь в том случае, если разность истинного и полученного результатов кратна числу $7 \times 9 = 63$. Так как подобная случайность все же возможна, то и двойная проверка не дает полной уверенности в правильности результата.

Впрочем, для обычных вычислений, где ошибаются чаще всего на 1 или 2 единицы, можно ограничиться только проверкою девяткой. Дополнительная проверка семеркой чересчур обременительна. Только тот контроль хорош, который не мешает работе.

Если тем не менее, выполняя ответственное вычисление, вы пожелаете для надежности произвести двойную проверку, то вместо делителя 7 лучше пользоваться делителем 11. При этом дело можно значительно упростить, применив следующий удобный признак делимости на 11: число разбивают на грани справа налево, по две цифры в каждой (самая левая грань может заключать и одну цифру); грани складывают, и полученная сумма будет «равноостаточна» с испытуемым числом по делителю 11: сумма граней дает при делении на 11 тот же остаток, что и испытуемое число.

Поясним сказанное примером. Требуется найти остаток от деления 24 716 на 11. Разбиваем число на грани и складываем их:

$$2 + 47 + 16 = 65.$$

Так как 65 при делении на 11 дает в остатке 10, то и число 24 716 дает при делении на 11 тот же остаток. Обоснование этого приема дается в моей книге «Живая математика».

Я предлагаю этот способ потому, что он одновременно дает и число, равноостаточное с испытуемым также по делителю 9. Таким образом, мы имеем возможность удобно произвести проверку сразу посредством двух делителей: 9 и 11. От такой проверки может ускользнуть только ошибка, кратная 99, т. е. весьма мало вероятная.

ХОРОШО ЛИ МЫ МНОЖИМ?

Старинные способы умножения были неуклюжи и неудобны, но так ли хорош наш нынешний способ, чтобы в нем невозможны были уже никакие дальнейшие улучшения? Нет, и наш способ не является совершенным; можно придумать еще более быстрые или еще более надежные. Из нескольких предложенных улучшений укажем пока только одно, увеличивающее не быстроту выполнения действия, а его надежность. Оно состоит в том, что при многозначном множителе начинают с умножения не на последнюю, а на первую цифру множителя. Выполненное на стр. 55 умножение 8713×264 примет при этом такой вид:

$$\begin{array}{r} \times 8713 \\ 264 \\ \hline 17426 \\ 52278 \\ 34852 \\ \hline 2300232 \end{array}$$

Как видим, последнюю цифру каждого частного произведения подписывают под той цифрой множителя, на которую умножают.

Преимущество подобного расположения в том, что цифры частных произведений, от которых зависят первые, наиболее ответственные цифры результата, получаются в начале действия, когда внимание еще не утомлено и, следовательно, вероятность сделать ошибку меньшая. (Кроме того, способ этот упрощает применение так называемого «сокращенного» умножения, о котором здесь мы распространяться не можем.)

«РУССКИЙ» СПОСОБ УМНОЖЕНИЯ

Вы не можете выполнить умножения многозначных чисел — хотя бы даже двузначных, — если не помните наизусть всех результатов умножения однозначных чисел,

т. е. того, что называется таблицей умножения. В старинной «Арифметике» Магницкого, о которой мы уже упоминали, необходимость твердого знания таблицы умножения воспета в таких — чуждых для современного слуха — стихах:

Аще кто не твердить	И во всей науки
таблицы и гордить,	несвободъ от муки,
Не можетъ познати	Колико не учить
числомъ что множати	туне ся удручить

И в пользу не будетъ
аще ю забудеть.

Автор этих стихов, очевидно, не знал или упустил из виду, что существует способ перемножать числа и без знания таблицы умножения. Способ этот, непохожий на наши школьные приемы, употребителен был в русском народном обиходе и унаследован от глубокой древности. Сущность его в том, что умножение любых двух чисел сводится к ряду последовательных делений одного числа пополам при одновременном удвоении другого числа. Вот пример:

$$\begin{array}{r} 32 \times 13 \\ 16 \times 26 \\ 8 \times 52 \\ 4 \times 104 \\ 2 \times 208 \\ 1 \times 416 \end{array}$$

Деление пополам продолжают до тех пор, пока в частном не получится 1, параллельно удваивая другое число. Последнее удвоенное число и дает искомый результат. Нетрудно понять, на чем этот способ основан: произведение не изменяется, если один множитель уменьшить вдвое, а другой вдвое же увеличить. Ясно поэтому, что в результате многократного повторения этой операции получается искомое произведение:

$$32 \times 13 = 1 \times 416.$$

Однако как поступить, если при этом приходится делить пополам число нечетное?

Народный способ легко выходит из этого затруднения. Надо, гласит правило, в случае нечетного числа откинуть единицу и делить остаток пополам; но зато к последнему числу правого столбца нужно будет прибавить все те числа этого столбца, которые стоят против нечет-

ных чисел левого столбца: сумма и будет искомым произведением. Практически это делают так, что все строки с четными левыми числами зачеркивают; остаются только те, которые содержат налево нечетное число. Приведем пример (звездочки указывают, что данную строку надо зачеркнуть):

$$\begin{array}{r} 19 \times 17 \\ 9 \times 34 \\ 4 \times 68^* \\ 2 \times 136^* \\ 1 \times 272 \end{array}$$

Сложив незачеркнутые числа, получаем вполне правильный результат: $17 + 34 + 272 = 323$.

На чем основан этот прием?

Правильность приема станет ясна, если принять во внимание, что

$$\begin{aligned} 19 \times 17 &= (18 + 1) \times 17 = 18 \times 17 + 17, \\ 9 \times 34 &= (8 + 1) \times 34 = 8 \times 34 + 34 \text{ и т. п.} \end{aligned}$$

Ясно, что числа 17, 34 и т. п., утрачиваемые при делении нечетного числа пополам, необходимо прибавить к результату последнего умножения, чтобы получить произведение.

ИЗ СТРАНЫ ПИРАМИД

Весьма вероятно, что описанный сейчас способ дошел до нас из глубочайшей древности и из отдаленной страны — из Египта. Мы мало знаем, как производили арифметические действия обитатели древней Страны пирамид. Но сохранился любопытный документ — папирус, на котором записаны арифметические упражнения ученика одной из землемерных школ древнего Египта; это так называемый «папирус Ринда», относящийся ко времени между 2000 и 1700 гг. до нашей эры ¹⁾ и представляющий собою копию еще более древней рукописи, переписанную неким Ахмесом. Писец ²⁾ Ахмес, найдя «ученическую тетрадку» этой отдаленней-

¹⁾ Папирус, заключенный в металлический футляр, был разыскан английским египтологом Генри Риндом. В развернутом виде имеет 20 м длины при 30 см ширины. Хранится в Британском музее, в Лондоне.

²⁾ Звание «писец» принадлежало третьему классу египетских жрецов; в заведовании их находилось «все относившееся к строительной части храма и к его земельной собственности». Математические, астрономические и географические знания составляли их главную специальность (В. Бобынин).

шей эпохи, тщательно переписал все арифметические упражнения будущего землемера — вместе с их ошибками и исправлениями учителя — и дал своему списку торжественное заглавие, которое дошло до нас в следующем неполном виде:

«Наставление, как достигнуть знания всех темных вещей... всех тайн, сокрытых в вещах.

Составлено при царе Верхнего и Нижнего Египта Ра-а-усе, дающем жизнь, по образцу древних сочинений времен царя Ра-ен-мата писцом Ахмесом».

Папирус Ринда заканчивается весьма оригинальными советами: «Лови гадов, мышей; выпалывай сорные травы за свежо; получай обильную пряжу. Проси у бога Ра тепла, ветра и высокой воды».

Один из египетских математических папирусов хранится в Москве в Музее изящных искусств имени А. С. Пушкина. Расшифровка этого папируса была начата академиком Б. А. Тураевым в 1914 г. и закончена академиком В. В. Струве в 1927 г.

В папирусе Ринда — этом интересном документе, насчитывающем за собою около 40 веков и свидетельствующем о еще более глубокой древности, мы находим четыре примера умножения, выполненные по способу, живо напоминающему наш русский народный способ. Вот эти примеры (точки впереди чисел обозначают число единиц множителя; знаком + мы отметили числа, подлежащие сложению):

$$\begin{array}{r}
 (8 \times 8) \qquad (9 \times 9) \\
 \begin{array}{r}
 .8 \\
 ..16 \\
32 \\
 ::::64
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 .9 + \\
 ..18 \\
36 \\
 ::::72 +
 \end{array}
 \end{array}$$

Итог....81

$$\begin{array}{r}
 (8 \times 365) \qquad (7 \times 2801) \\
 \begin{array}{r}
 .365 \\
 ..730 \\
1460 \\
 ::::2920
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 .2801 + \\
 ..5602 + \\
11204 + \\
 \hline
 \text{Итог...}19607
 \end{array}
 \end{array}$$

Вы видите из этих примеров, что еще за тысячелетия до нас египтяне пользовались приемом умножения, довольно сходным с нашим народным (рис. 24), и что неизвестными путями он как бы перекопал из древней Страны пирамид в современную эпоху. Если бы обитателю земли фараонов предложили перемножить, например, 19×17 , он

(8×8)	(8×8)
· ⇒	: : : : И
· · 2Λ	· · · И
· · · 4λ	· 15
: : : : 64	· 16
	· 32
	· 64



Рис. 24. Существуют приемы счета, проникшие в Россию, по-видимому, из древнего Египта.

произвел бы это действие следующим образом: написал бы ряд последовательных удвоений числа 17:

1	17 +
2	34 +
4	68
8	136
16	272 +

и затем сложил бы те числа, которые отмечены здесь знаком +, т. е. $17 + 34 + 272$. Он получил бы, конечно, вполне правильный результат: $17 + (2 \times 17) + (16 \times 17) = 19 \times 17$. Легко видеть, что подобный прием, по существу, весьма близок к нашему народному (замена умножения рядом последовательных удвоений).

Трудно сказать, у одних ли наших крестьян был в ходу такой древний способ умножения; английские авторы называют его именно «русским крестьянским способом»; в Гер-

мании крестьяне кое-где хотя и пользуются им, но также называют его «русским».

Чрезвычайно интересно было бы получить от читателей сведения о том, применяется ли сейчас где-нибудь этот древний способ умножения, имеющий за собой такое долгое и оригинальное прошлое.

Следовало бы вообще с большим вниманием относиться к народной математике: вникать в употребляемые народом приемы счета и измерений, собирать и записывать эти памятники народного математического творчества, дошедшие до нашего времени из глубин седой старины.

На это давно указывал историк математики В. В. Бобынин, предложивший даже краткую программу собирания памятников народной математики. Нелишним будет, пожалуй, привести здесь составленный им перечень того, что именно следует собирать и записывать:

- 1) счисление и счет,
- 2) приемы меры и веса,
- 3) геометрические сведения и их выражения в постройках, нарядах и украшениях,
- 4) способы межевания,
- 5) народные задачи,
- 6) пословицы, загадки и вообще произведения народной словесности, имеющие отношение к математическим знаниям, 7) памятники древней народной математики, находящиеся в рукописях, музеях, коллекциях и т. д. или находимые при раскопках курганов, могил, городищ и пр.

В заключение привожу краткую справку о том, когда впервые появились общеупотребительные теперь знаки арифметических действий, обозначение дроби, степени и др.:

+ и — в рукописях Леонардо да Винчи (1452—1519);

× в сочинении Утреда (1631);

и : в сочинении Лейбница (1646—1716);

$\frac{a}{b}$ в сочинении Фибоначчи (1202);

a^n в сочинении Шюке (1484);

= в сочинении Рекорда (1557);

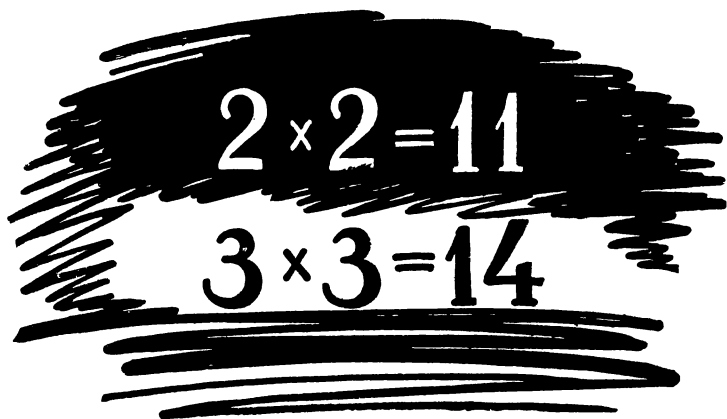
> и < в сочинении Гарриота (1631);

() и [] в сочинении Жирара (1629).

Тому, кто желает подробнее познакомиться с историей арифметики, советую прочесть книгу В. Беллюстина «Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики. Обще-доступные очерки для любителей арифметики» (1914). Книгу можно попытаться получить в библиотеках или в магазинах старой книги.

Арифметические курьезы

$$100 = \left\{ \begin{array}{l} 123 + 45 - 67 + 8 - 9 \\ 123 - 45 - 67 + 89 \\ (1 + 2 - 3 - 4) \cdot (5 - 6 - 7 - 8 - 9) \end{array} \right.$$



ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ НЕДЕСЯТИЧНЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

ЗАГАДОЧНАЯ АВТОБИОГРАФИЯ

Эту главу позволю себе начать с задачи, которую я придумал когда-то для читателей старого распространенного журнала¹⁾ в качестве «задачи на премию». Вот она:

В бумагах одного чудака-математика найдена была его автобиография. Она начиналась следующими строками:

«Я окончил курс университета 44 лет от роду. Спустя год, 100-летним молодым человеком, я женился на 34-летней девушке. Незначительная разница в возрасте — всего 11 лет — способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Спустя немного лет у меня была уже и маленькая семья из 10 детей. Жалования я получал в месяц всего 200 рублей, из которых $\frac{1}{10}$ приходилось отдавать сестре, так что мы с детьми жили на 130 руб. в месяц» и т. д.

¹⁾ «Природа и люди» (потом задача была перепечатана мною в сборнике Е. И. Игнатьева «В царстве смекалки»).

Чем объяснить странные противоречия в числах этого отрывка?

Решение задачи подсказывается названием этой главы: *недесятичная система счисления* — вот единственная причина кажущейся противоречивости приведенных чисел. Напав на эту мысль, нетрудно догадаться, в какой именно системе счисления изображены числа чудаком-математиком. Секрет выдается фразой: «спустя год (после 44 лет) 100-летним молодым человеком...» Если от прибавления одной единицы число 44 преобразуется в 100, то, значит, цифра 4 — н а и б о л ь ш а я в этой системе (как 9 — в десятичной), а следовательно, основанием системы является 5. Чудаку-математику пришла фантазия написать все числа своей биографии по п я т е р и ч н о й с и с т е м е с ч и с л е н и я, т. е. по такой, в которой единица высшего разряда не в 10, а в 5 раз больше единицы низшего: на первом справа месте стоят в ней простые единицы (не свыше четырех), на втором — не десятки, а пятёрки; на третьем не сотни, а «двадцатипятёрки» и т. д. Поэтому число, изображённое в тексте записки «44» означает не $4 \times 10 + 4$, как в десятичной системе, а $4 \times 5 + 4$, т. е. двадцать четыре. Точно так же число «100» в автобиографии означает одну единицу третьего разряда в пятеричной системе, т. е. 25. Остальные числа записи соответственно означают ¹⁾:

$$\begin{aligned} \text{«34»} &= 3 \times 5 + 4 = 19, \\ \text{«11»} &= 5 + 1 = 6, \\ \text{200»} &= 2 \times 25 = 50, \\ \text{«10»} &= 5, \\ \text{«}\frac{1}{10}\text{»} &= \frac{1}{5}, \\ \text{«130»} &= 25 + 3 \times 5 = 40. \end{aligned}$$

Восстановив истинный смысл чисел записи, мы видим, что в ней никаких противоречий нет:

«Я окончил университет 24 лет от роду. Спустя год, 25-летним молодым человеком я женился на 19-летней девушке. Незначительная разница в возрасте — всего 6 лет — способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Спустя немного лет у меня была уже и маленькая семья из 5 детей. Жалованья я получал в месяц 50 рублей,

¹⁾ Здесь и в дальнейшем в кавычки берутся числа, написанные не в десятичной системе счисления.

из которых $\frac{1}{5}$ приходилось отдавать сестре, так что мы с детьми жили на 40 руб. в месяц.

Трудно ли изображать числа в других системах счисления? Нисколько. Положим, вы желаете число 119 изобразить в пятеричной системе. Делите 119 на 5, чтобы узнать, сколько в нем единиц первого разряда:

$$119:5=23, \text{ остаток } 4.$$

Значит, число простых единиц будет 4. Далее, 23 пятерки не могут стоять все во втором разряде, так как высшая цифра в пятеричной системе — 4, и больше 4 единиц ни в одном разряде быть не должно. Делим поэтому 23 на 5:

$$23:5=4, \text{ остаток } 3.$$

Это показывает, что во втором разряде («пятерок») будет цифра 3, а в третьем («двадцатипятерок») — 4.

Итак, $119=4 \times 25 + 3 \times 5 + 4$, или в пятеричной системе «434».

Сделанные действия для удобства располагают так:

$$\begin{array}{r} 119 \mid 5 \\ \hline 4 \mid 23 \mid 5 \\ \hline \mid 3 \mid 4 \end{array}$$

Курсивные цифры (при письме можно их подчеркивать) выписывают справа налево и сразу получают искомое изображение числа в иной системе.

Приведем еще примеры.

Пример 1. Изобразить 47 в троичной системе.

Решение:

$$\begin{array}{r} 47 \mid 3 \\ \hline 2 \mid 15 \mid 3 \\ \hline \mid 0 \mid 5 \mid 3 \\ \hline \mid \mid 2 \mid 1 \end{array}$$

Ответ: «1202». Проверка: $1 \times 27 + 2 \times 9 + 0 \times 3 + 2 = 47$.

Пример 2. Число 200 изобразить в семеричной системе.

Решение:

$$\begin{array}{r} 200 \mid 7 \\ \hline 60 \mid 28 \mid 7 \\ \hline \mid 4 \mid 0 \mid 4 \end{array}$$

О т в е т: «404». Проверка: $4 \times 49 + 0 \times 7 + 4 = 200$.

П р и м е р 3. Число 163 изобразить в двенадцатеричной системе.

Р е ш е н и е:

$$\begin{array}{r} 163|12 \\ \underline{43|13|12} \\ 7 \quad 1 \quad 1 \end{array}$$

О т в е т: «117». Проверка: $1 \times 144 + 1 \times 12 + 7 = 163$.

Теперь читатель не затруднится изобразить любое число в какой угодно системе счисления. Единственная помеха может возникнуть лишь вследствие того, что в некоторых случаях не будет доставать обозначений для цифр. В самом деле, при изображении числа в системах с основанием более десяти (например, в двенадцатеричной) может явиться надобность в цифрах «десять» и «одиннадцать». Из этого затруднения нетрудно выйти, избрав для новых цифр какие-нибудь условные знаки или буквы, хотя бы, например, буквы К и Л, стоящие в русском алфавите на 10-м и 11-м месте. Так, число 1579 в двенадцатеричной системе изобразится следующим образом:

$$\begin{array}{r} 1579 \quad | \quad 12 \\ 12 \quad | \quad 131 \quad 12 \\ \underline{37} \quad \quad \underline{11 \quad 10} \\ 19 \\ \hline 7 \end{array}$$

О т в е т: «(10) (11)7», или КЛ7.

Проверка: $10 \times 144 + 11 \times 12 + 7 = 1579$.

З а д а ч а 1. Выразить число 1926 в двенадцатеричной системе¹⁾.

З а д а ч а 2. Выразить число 273 в двенадцатеричной системе.

ПРОСТЕЙШАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Нетрудно сообразить, что в каждой системе высшая цифра, какая может понадобиться, равна основанию этой системы без единицы. Например, в десятичной системе выс-

¹⁾ Ответы к задачам см. в конце книги.

шая цифра 9, в шестеричной — 5, в троичной — 2, в пятнадцатеричной — 14 и т. д.

Самая простая система счисления, конечно, та, для которой требуется меньше всего цифр. В десятичной системе нужны 10 цифр (считая и 0), в пятеричной — 5 цифр, в троичной — 3 цифры (1, 2 и 0), в двоичной — только 2 цифры (1 и 0). Существует ли «единичная» система? Конечно: это система, в которой единицы высшего разряда в о д и н раз больше единицы низшего, т. е. равны ей; другими словами, «единичной» можно назвать такую систему, в которой единицы всех разрядов имеют о д и н а к о в о е значение. Это самая примитивная «система»; ею пользовался первобытный человек, делая на дереве зарубки по числу отсчитываемых предметов. Но между нею и всеми другими системами счета есть громадная разница: она лишена главного преимущества нашей нумерации — так называемого п о з и ц и о н н о г о (поместного) з н а ч е н и я ц и ф р. Действительно, в «единичной» системе знак, стоящий на 3-м или 5-м месте, имеет то же значение, что и стоящий на первом месте. Между тем даже в двоичной системе единица на 3-м месте (справа) уже в 4 раза (2×2) больше, чем на первом, а на 5-м — в 16 раз больше ($2 \times 2 \times 2 \times 2$). Для изображения какого-нибудь числа по «единичной» системе нужно ровно столько же знаков, сколько было сосчитано предметов: чтобы записать сто предметов, нужно сто знаков, в двоичной же — только семь («1100100»), а пятеричной — всего три («400»).

Вот почему «единичную» систему едва ли можно назвать «системой»; по крайней мере, ее нельзя поставить рядом с остальными, так как она принципиально от них отличается, не давая никакой экономии в изображении чисел. Если же ее откинуть, то простейшей системой счисления нужно признать систему д в о и ч н у ю, в которой употребляются всего две цифры: 1 и 0. При помощи единицы и нуля можно изобразить все бесконечное множество чисел! Для устной и письменной нумерации система эта мало удобна: получаются слишком длинные числа¹⁾. Двоичная система оказалась весьма удобной в ряде теоретических исследований. В последнее время роль двоичной системы особенно возросла, так как она положена в основу производства

¹⁾ Зато, как увидим далее, для такой системы до крайности упрощаются таблица сложения и таблица умножения.

вычислений на электронных счетных машинах. Она обладает некоторыми любопытными особенностями, присущими только ей одной; особенностями этими, между прочим, можно воспользоваться для выполнения ряда эффектных математических фокусов, о которых мы скоро побеседуем подробно в главе «Фокусы без обмана».

НЕОБЫЧАЙНАЯ АРИФМЕТИКА

К арифметическим действиям мы привыкли настолько, что выполняем их автоматически, почти не думая о том, что мы делаем. Но те же действия потребуют от нас немало напряжения, если мы пожелаем применить их к числам, написанным не по десятичной системе. Попробуем, например, выполнить сложение следующих двух чисел, написанных по п я т е р и ч н о й системе:

$$\begin{array}{r} + \text{«}4203\text{»} \\ \text{«}2132\text{»} \\ \hline \end{array} \quad (\text{по пятеричной системе}).$$

Складываем по разрядам, начиная с единицы, т. е. справа: $3+2$ равно пяти; но мы не можем записать 5, потому что такой цифры в пятеричной системе не существует: пять есть уже единица высшего разряда. Значит, в сумме вовсе нет единиц; пишем 0, а пять, т. е. единицу следующего разряда, удерживаем в уме. Далее, $0+3=3$, да еще единица, удержанная в уме, — всего 4 единицы второго разряда. В третьем разряде получаем $2+1=3$. В четвертом $4+2$ равно шести, т. е. $5+1$; пишем 1, а 5, т. е. единицу высшего разряда, относим далее влево. Искомая сумма = «11340»:

$$\begin{array}{r} + \text{«}4203\text{»} \\ \text{«}2132\text{»} \\ \hline \text{«}11340\text{»} \end{array} \quad (\text{в пятеричной системе}).$$

Предоставляем читателю проверить это сложение, предварительно переводя изображенные в кавычках числа в десятичную систему.

Точно так же выполняются и другие действия. Для упражнения приводим далее ряд задач¹⁾, число которых читатель при желании может увеличить самостоятельно:

¹⁾ Ответы к задачам даны в конце книги.

	Задача 3	Задача 4	Задача 5
По пяти- ричной системе	$\begin{array}{r} \text{«2143»} \\ - \text{«334»} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \times \text{«213»} \\ \text{«3»} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \times \text{«42»} \\ \text{«31»} \\ \hline \end{array}$

	Задачи 6 и 7	Задачи 8 и 9
По тро- ичной системе	$\begin{array}{r} \text{«212»} \\ + \text{«120»} \\ \hline \text{«201»} \end{array} \quad \times \begin{array}{r} \text{«122»} \\ \text{«20»} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{«220»} : \text{«2»} = \\ \text{«201»} : \text{«12»} = \end{array}$

При выполнении этих действий мы сначала мысленно изображаем написанные числа в привычной нам десятичной системе, а получив результат, снова изображаем его в требуемой недесятичной системе. Но можно поступать и иначе: составить «таблицу сложения» и «таблицу умножения» в тех же системах, в которых даны нам числа, и пользоваться ими непосредственно.

Например, таблица сложения в пятиричной системе такова:

0	1	2	3	4
1	2	3	4	10
2	3	4	10	11
3	4	10	11	12
4	10	11	12	13

С помощью этой таблицы мы могли бы сложить числа «4203» и «2132», написанные в пятиричной системе, гораздо менее напрягая внимание, чем при способе, примененном раньше.

Упрощается, как легко понять, также выполнение вычитания.

Составим таблицу умножения («Пифагорову») для п я-
т е р и ч н о й системы:

1	2	3	4
2	4	11	13
3	11	14	22
4	13	22	31

Имея эту таблицу перед глазами, вы опять-таки можете облегчить себе труд умножения (и деления) чисел в пяте-
ричной системе, как легко убедиться, применив ее к приве-
денным выше примерам. Например, при умножении

$$\text{По пятеричной} \left\{ \begin{array}{l} \times \text{«}213\text{»} \\ \text{«}3\text{»} \\ \hline \text{«}1144\text{»} \end{array} \right.$$

рассуждаем так: трижды три «14» (из таблицы); 4 пишем,
1 — в уме. Один на 3 дает 3, да еще один — пишем 4. Дваж-
ды три=«11»; 1 пишем, 1 переносим влево. Получаем в ре-
зультате «1144».

Чем меньше основание системы, тем меньше и соответ-
ствующие таблицы сложения и умножения. Например, для
троичной системы обе таблицы таковы:

Таблица сложения
для троичной
системы:

0	1	2
1	2	10
2	10	11

Пифагорова
таблица
для
троичной
системы:

1	2
2	11

Их можно было бы сразу запомнить и пользоваться ими для выполнения действий. Самые маленькие таблицы сложения и вычитания получаются для двоичной системы:

Таблица
сложения
для
двоичной
системы

0	1
1	10

Таблица умноже-
ния для двоичной
системы:

$1 \times 1 = 1$

При помощи таких-то простых «таблиц» можно выполнять в двоичной системе все четыре действия! Умножения в этой системе, в сущности, как бы и вовсе нет: ведь умножить на единицу — значит оставить число без изменения; умножение же на «10», «100», «1000» (т. е. на 2, на 4, на 8) сводится к простому приписыванию справа соответствующего числа нулей. Что же касается сложения, то для выполнения его нужно помнить только одно — что в двоичной системе $1+1=10$. Не правда ли, мы с полным основанием назвали раньше двоичную систему самой простой из всех возможных? Длиннота чисел этой своеобразной арифметики искупается простотой выполнения над ними всех арифметических действий.

Пусть требуется, например, умножить

$$\begin{array}{l} \text{в двоичной} \\ \text{системе} \end{array} \left\{ \begin{array}{r} \times \quad \text{«1001011101»} \\ \quad \text{«100101»} \\ \hline + \quad \text{«1001011101»} \\ \quad \text{«1001011101»} \\ \hline \text{«1001011101»} \\ \hline \text{«101011101110001»} \end{array} \right.$$

Выполнение действия сводится только к переписыванию данных чисел в надлежащем расположении: это требует несравненно меньших умственных усилий, чем умножение тех же чисел в десятичной системе ($605 \times 37 = 22\,385$). Если бы у нас была принята двоичная система, то изучение п и с ь м е н н о г о счисления требовало бы наименьшего напряжения мысли (зато — наибольшего количества бумаги и чернил). Однако в у с т н о м счете двоичная арифметика по удобству выполнения действий значительно уступает нашей десятичной.

Приведем также образчик действия д е л е н и я, выполненного в двоичной системе счисления:

$$\begin{array}{r} 10000010:111=10010 \\ \underline{111} \\ 1001 \\ \underline{111} \\ 100 \end{array}$$

В привычной нам десятичной системе действие это имело бы следующий вид:

$$\begin{array}{r} 130:7=18 \\ \underline{7} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 4 \end{array}$$

Делимое, делитель, частное и остаток в обоих случаях, по существу, одинаковы, но промежуточные выкладки разные.

ЧЕТ ИЛИ НЕЧЕТ?

Не видя числа, трудно, конечно, угадать, какое оно — четное или нечетное. Но не думайте, что вы всегда сможете сказать это, едва увидите задаваемое число. Скажите, например, четное или нечетное число 16?

Если вам известно, что оно написано по десятичной системе, то вы вправе утверждать, что число это — четное. Но когда оно написано по какой-либо другой системе — можно ли быть уверенным, что оно изображает непременно четное число?

Оказывается, нет. Если основание, например, семь, то «16» означает $7+6=13$, число нечетное. То же будет и для всякого нечетного основания (потому что всякое нечетное число $+6$ есть тоже нечетное число).

Отсюда вывод, что знакомый нам признак делимости на два (последняя цифра четная) безусловно пригоден только для десятичной системы счисления, для других же — не всегда. А именно он верен только для систем счисления с ч е т н ы м основанием: шестеричной, восьмеричной и т. п. Каков же признак делимости на 2 для системы с н е ч е т н ы м основанием? Достаточно краткого размышления, чтобы установить его: сумма цифр должна быть четной. Напри-

мер, число «136» четное во всякой системе счисления, даже и с нечетным основанием; действительно, в последнем случае имеем: нечетное число¹⁾ + нечетное число + четное = четному числу.

С такою же осторожностью надо отнестись к задаче: всегда ли число 25 делится на пять? В семеричной или в восьмеричной системе число, так изображенное, не делится на 5 (потому что оно равно девятнадцати или двадцати одному). Точно также общеизвестный признак делимости на 9 (по сумме цифр) правилен только для десятичной системы. Напротив, в пятеричной системе тот же признак делимости применим для 4, а, например, в семеричной — для 6. Так, число «323» в пятеричной системе делится на 4, потому что $3+2+3=8$, а число «51» в семеричной — на 6 (легко убедиться в этом, переведя числа в десятичную систему: получим соответственно 88 и 36). Почему это так, читатель сам сможет сообразить, если вникнет хорошенько в вывод признака делимости на 9 и приложит те же рассуждения, соответственно измененные, например, к семеричной системе для вывода признака делимости на 6.

Труднее доказать чисто арифметическим путем справедливость следующих положений:

$$\left. \begin{array}{l} 121:11=11 \\ 144:12=12 \\ 21 \times 21=441 \end{array} \right\} \text{ во всех системах счисления } \\ \text{(где имеются соответствующие цифры).}$$

Знакомые с начатками алгебры легко найдут основание, объясняющее свойство этих равенств. Остальные читатели могут испытать их для разных систем счисления.

ПОУЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

- 1) Когда $2 \times 2 = 100$?
- 2) Когда $2 \times 2 = 11$?
- 3) Когда 10 — число нечетное?
- 4) Когда $2 \times 3 = 11$?
- 5) Когда $3 \times 3 = 14$?

Ответы на эти вопросы не должны затруднить читателя, познакомившегося с настоящей главой.

1) $2 \times 2 = 100$, когда 100 написано по двоичной системе.

¹⁾ Нечетное число, умноженное на себя (т. е. на нечетное), всегда дает нечетное число (например, $7 \times 7 = 49$, $11 \times 11 = 121$ и т. п.).

2) $2 \times 2 = 11$, когда 11 написано по троичной системе.

3) 10 — число нечетное, когда оно написано по пятеричной системе, а также по системе с основанием 3, 7 и 9.

4) $2 \times 3 = 11$, когда 11 написано по пятеричной системе.

5) $3 \times 3 = 14$, когда 14 написано по пятеричной системе.

ДРОБИ БЕЗ ЗНАМЕНАТЕЛЯ

Мы привыкли к тому, что без знаменателя пишутся лишь дроби десятичные. Поэтому с первого взгляда кажется, что написать прямо без знаменателя дробь $\frac{2}{7}$, или $\frac{1}{3}$, нельзя. Дело представится нам, однако, иначе, если вспомним, что дроби без знаменателя возможны и в других системах счисления. Что, например, означает дробь «0,4» в пятеричной системе? Конечно, $\frac{4}{5}$. Дробь «1,2» в семеричной системе означает $1\frac{2}{7}$. А что означает в той же семеричной системе дробь «0,33»? Здесь результат сложнее: $\frac{3}{7} + \frac{3}{49} = \frac{24}{49}$.

Рассмотрим еще несколько недесятичных дробей без знаменателя. Чему равны

- а) «2,121» в троичной системе?
- б) «1,011» в двоичной системе?
- в) «3,431» в пятеричной системе?
- г) «2,(5)» в семеричной системе?

О т в е т ы:

$$\text{а) } 2 + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{27} = 2\frac{16}{27},$$

$$\text{б) } 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1\frac{3}{8},$$

$$\text{в) } 3 + \frac{4}{5} + \frac{3}{25} + \frac{1}{125} = 3\frac{116}{125},$$

$$\text{г) } 2 + \frac{5}{7} + \frac{5}{49} + \frac{5}{343} + \dots = 2\frac{5}{6}.$$

В правильности последнего равенства читатель легко может убедиться, если попробует применить к данному слу-

чаю, с соответствующим видоизменением, рассуждения, относящиеся к превращению десятичных и периодических дробей в простые.

В заключение рассмотрим несколько задач особого рода (ответы см. в конце книги).

Задача 10. По какой системе счисления выполнено следующее сложение:

$$\begin{array}{r} 756 \\ + 307 \\ + 2456 \\ + 24 \\ \hline 3767 \end{array}$$

Задача 11. По какой системе счисления выполнено деление:

$$\begin{array}{r} 4415400 : 4532 = 543 \\ \hline 40344 \\ \hline 34100 \\ \hline 31412 \\ \hline 22440 \\ \hline 22440 \\ \hline 0 \end{array}$$

Задача 12. Напишите число «сто тридцать» во всех системах счисления от двоичной до десятичной включительно.

Задача 13. Чему равно число «123», если считать его записанным во всех системах счисления до девятеричной включительно? Возможно ли, что оно написано по двоичной системе? А по троичной? Если оно написано по пятеричной системе, то можете ли вы узнать, не переписывая его по десятичной системе, делится ли оно без остатка на шесть? Если написано по десятичной системе, то делится ли оно без остатка на четыре?

Арифметический курьез

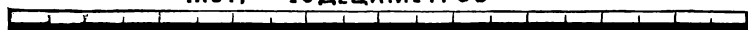
$$2^5 \cdot 9^2 = 2592$$



ФУТ = 12 ДЮЙМОВ



МЕТР = 10 ДЕЦИМЕТРОВ



ГЛАВА ПЯТАЯ ГАЛЕРЕЯ ЧИСЛОВЫХ ДИКОВИНОК

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ КУНСТКАМЕРА

В мире чисел, как и в мире живых существ, встречаются подлинные диковинки, редкие экземпляры, обладающие исключительными свойствами. Из таких необыкновенных чисел можно было бы составить своего рода музей числовых редкостей, настоящую «арифметическую кунсткамеру». В ее витринах нашли бы себе место не только числовые исполины, о которых мы побеседуем еще в особой главе, но и числа скромных размеров, зато выделяющиеся из ряда других какими-либо необычайными свойствами. Некоторые из них уже по внешности привлекают к себе внимание; другие открывают свои диковинные особенности лишь при более близком знакомстве.

Представленные в нашей «галерее» любопытные особенности некоторых чисел не имеют ничего общего с теми воображаемыми диковинками, которые усматривают в иных числах любители таинственного. Образчиком подобных чис-

ловых суеверий может служить следующее арифметическое соображение, неосторожно высказанное знаменитым французским писателем Виктором Гюго:

«Три — число совершенное. Единица для числа 3 то же, что диаметр для круга. Среди прочих чисел 3 то же, что круг среди фигур. Число 3 — единственное, имеющее центр. Остальные числа — эллипсы, имеющие два фокуса. Отсюда следующая особенность, присущая единственно числу 3: сложите цифры любого числа, кратного 3-м, — сумма всегда делится без остатка на 3».

В этом туманном и мнимоглубокомысленном откровении все неверно: что ни фраза, то либо вздор, либо вовсе бессмыслица. Верно только замечание о свойстве суммы цифр, но свойство это не вытекает из сказанного и к тому же не представляет исключительной особенности числа 3: им отличается в десятичной системе также и число 9, а в других системах — числа, на единицу меньшие основания.

Диковинки нашей «галереи» — иного рода: в них нет ничего таинственного или неразгаданного.

Приглашаю читателя совершить экскурсию по галерее таких числовых диковинок и познакомиться с некоторыми из них.

Пройдем, не останавливаясь, мимо первых витрин, заключающих числа, свойства которых нам хорошо знакомы. Мы знаем уже, почему попало в галерею диковинок числа 2: не потому, что оно первое четное число¹⁾, а потому, что оно —



Рис. 25. Витрина числовых диковинок.

¹⁾ Первым четным числом можно, впрочем, считать не 2, а 0.

основание самой любопытной системы счисления (см. стр. 73—74).

Не будет неожиданностью для нас найти здесь и число 9, — конечно, не как «символ постоянства»¹⁾, а как число, облегчающее нам проверку всех арифметических действий (см. стр. 54—58). Но вот витрина, за стеклом которой мы видим.

ЧИСЛО 12

Чем оно замечательно? Это число месяцев в году и число единиц в дюжине. Но что, в сущности, особенного в дюжине? Немногим известно, что 12 — старинный и едва не победивший соперник числа 10 в борьбе за почетный пост основания системы счисления. Культурнейший народ древнего Востока — вавилоняне и их предшественники шумерийцы, вели счет в двенадцатеричной системе счисления. Кое в чем мы и до сих пор платим дань этой системе, несмотря на победу десятичной. Наше пристрастие к дюжинам и grossам²⁾, наше деление суток на две дюжины часов, деление часа на 5 дюжин минут, деление минуты на столько же секунд, деление круга на 30 дюжин градусов, наконец, деление фута на 12 дюймов — не свидетельствует разве все это (и многое другое) о том как велико в наши дни влияние древней системы?

Хорошо ли, что в борьбе между дюжиной и десяткой победила последняя? Конечно, сильными союзницами десятки были и остаются наши собственные руки с десятью пальцами — живые счетные машины. Но если бы не это, то следовало бы, безусловно, отдать предпочтение 12 перед 10. Гораздо удобнее производить расчеты по двенадцатеричной системе, нежели по десятичной. Причина та, что число 10 делится без остатка на 2 и на 5, между тем как 12 делится и на 2, и на 3, и на 4, и на 6. У 10 всего два делителя, у 12 — четыре. Преимущества двенадцатеричной системы станут вам яснее, если вы примете в соображение, что в двенадцатеричной системе число, оканчивающееся нулем, кратно и 2, и 3, и 4, и 6: подумайте, как удобно делить число, когда и $\frac{1}{2}$, и $\frac{1}{3}$, и $\frac{1}{4}$, и $\frac{1}{6}$ его должны быть целыми числами! Если же выраженное в двенадцатеричной системе число оканчивается двумя нулями, то оно должно делиться без

¹⁾ Древние (последователи Пифагора) считали 9 символом постоянства, «так как все числа, кратные 9, имеют сумму цифр, кратную 9».

²⁾ Гросс — 12 дюжин. В коробке перьев — гросс, 144 штуки.

остатка на 144, а следовательно, и на все множители 144-х, т. е. на следующий ряд чисел:

2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144.

Четырнадцать делителей — вместо тех восьми, которые имеют числа, написанные в десятичной системе, если оканчиваются двумя нулями (2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 и 100). В нашей системе только дроби вида $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{20}$ и т. д. превращаются в конечные десятичные; в двенадцатеричной же системе можно написать без знаменателя гораздо более разнообразные дроби и прежде всего: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{36}$, $\frac{1}{48}$, $\frac{1}{72}$, $\frac{1}{144}$, которые соответственно изобразятся так:

0,6; 0,4; 0,3; 0,2; 0,16; 0,14; 0,1; 0,09; 0,08;
0,06; 0,04; 0,03; 0,02; 0,01.

Было бы, впрочем, большим заблуждением думать, что делимость числа может зависеть от того, в какой системе счисления оно изображено. Если орехи, заключающиеся в данном мешке, могут быть разложены в 5 одинаковых куч, то это свойство их, конечно, не изменится от того, будет ли наше число орехов выражено в той или иной системе счисления, или отложено на счетах, или написано прописью, или, наконец, изображено каким либо иным способом. Если число, написанное в двенадцатеричной системе, делится на 6 или на 72, то, будучи выражено в другой системе счисления, например в десятичной, оно должно иметь те же делители. Разница лишь в том, что в двенадцатеричной системе делимость на 6 или на 72 легче обнаружить (число оканчивается одним или двумя нулями).

При таких преимуществах двенадцатеричной системы неудивительно, что среди математиков раздавались голоса за полный переход на эту систему. Однако мы уже чересчур тесно сжились с десятичной системой, чтобы решиться на такую реформу.

Великий французский математик Лаплас так высказался по этому вопросу: «Основание нашей системы нумерации не делится на 3 и на 4, т. е. на два делителя, весьма употребительные по их простоте. Присоединение двух новых знаков (цифр) дало бы системе счисления это преимущество; но такое нововведение было бы, несомненно, отвергнуто. Мы потеряли бы выгоду, породившую нашу арифметику, — именно возможность счета по пальцам рук».

Напротив, следовало бы ради единообразия перейти также в измерении дуг от употребительных градусов и минут к новым, десятичным.

Такую реформу пытались провести во Франции, но она не привилась. Не кто иной, как сейчас упомянутый Лаплас, был горячим сторонником этой реформы. Его знаменитая книга «Изложение системы мира» последовательно проводит десятичное подразделение углов; градусом он называет не 90-ю, а 100-ю долю прямого угла, минутой — 100-ю часть градуса и т. д. Лаплас высказывался даже за десятичное подразделение часов и минут. «Единообразие системы мер требует, чтобы день был разделен на 100 часов, час на 100 минут и минута на 100 секунд», — писал он.

Вы видите, следовательно, что дюжина имеет за собой длинную историю и что число 12 не без основания очутилось в галерее числовых диковинок. Зато его соседка «чертова дюжина», 13, фигурирует здесь не потому, что чем-либо замечательна, а скорее именно потому, что ничем не замечательна, хотя и пользуется такой мрачной славой: разве не удивительно, что ровно ничем не выделяющееся число могло стать столь «страшным» для суеверных людей?

Как было распространено это суеверие (зародившееся в древнем Вавилоне), видно из того, что в эпоху царского правления при устройстве электрического трамвая в Петербурге долго не решались... вводить маршрут № 13 и пропустили его, перейдя сразу к № 14: власти думали, что публика не станет ездить в вагонах с таким «роковым» номером. Любопытно и то, что в Петербурге было немало домов, где 13-й номер квартиры пропущен... В гостиницах нередко отсутствовала комната № 13. Для борьбы с этим ничем не обоснованным числовым суеверием кое-где на Западе (например, в Англии) учреждали даже особые «клубы числа 13»...

В следующей витрине арифметической кунсткамеры перед нами

ЧИСЛО 365

Оно замечательно, прежде всего, тем, что определяет число дней в году. Далее, при делении на 7 оно дает в остатке 1: эта несущественная, казалось бы, особенность числа 365 имеет большое значение для нашего семидневного календаря.

Другая особенность числа 365 не связана с календарем:

$$365 = 10 \times 10 + 11 \times 11 + 12 \times 12,$$

365

Рис. 26. Известны ли вам особенности этого числа?



Рис. 27. Известная картина художника Богданова-Бельского «Трудная задача».

т. е. 365 равно сумме квадратов трех последовательных чисел, начиная с 10:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365.$$

Но и это еще не все, тому же равна сумма квадратов двух следующих чисел 13 и 14:

$$13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365.$$

На этом свойстве числа 365 основана задача С. А. Рачинского, изображенная на известной картине «Трудная задача» Богданова-Бельского (рис. 27):

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} = ?$$

Таких чисел немного наберется в нашей галерее арифметических диковинок.

ТРИ ДЕВЯТКИ

В следующей витрине выставлено наибольшее из всех трехзначных чисел: 999. Оно, без сомнения, гораздо удивительнее, чем его перевернутое изображение — 666 — знаменитое «звериное число» Апокалипсиса, вселявшее нелепый страх во многих суеверных людей, но по арифметическим свойствам ничем не выделяющееся среди прочих чисел.

999

Рис. 28. Число, на которое легко умножать.

Любопытная особенность числа 999 проявляется при умножении на него всякого другого трехзначного числа. Тогда получается шестизначное произведение: первые три цифры его есть умножаемое число, только уменьшенное на единицу, а остальные три цифры (кроме последней) — «дополнения» первых до 9. Например:

$$573 \times 999 = \begin{array}{r} 572 \\ 572 \ 427 \\ \hline 999 \end{array}$$

Стоит лишь взглянуть на следующую строку, чтобы понять происхождение этой особенности:

$$573 \times 999 = 573 \times (1000 - 1) = \left\{ \begin{array}{r} 573\,000 \\ - \quad 573 \\ \hline 572\,427 \end{array} \right.$$

Зная эту особенность, мы можем «мгновенно» умножать любое трехзначное число на 999:

$$947 \times 999 = 946\,053,$$

$$509 \times 999 = 508\,491,$$

$$981 \times 999 = 980\,019 \text{ и т. д.}$$

А так как $999 = 9 \times 111 = 3 \times 3 \times 3 \times 37$, то вы можете, опять-таки с молниеносной быстротой, писать целые колонны шестизначных чисел, кратных 37; незнакомый со свойствами числа 999, конечно, сделать этого не в состоянии. Короче говоря, вы можете устраивать перед непосвященными маленькие сеансы «мгновенного умножения и деления».

ЧИСЛО ШЕХЕРАЗАДЫ

Следующее на очереди у нас число 1001 — прославленное число Шехеразады. Вы, вероятно, и не подозревали, что в самом названии сборника волшебных арабских сказок заключается также своего рода чудо, которое могло бы поразить воображение сказочного султана не менее многих других чудес Востока, если бы он способен был интересоваться арифметическими диковинками.

1001

Рис. 29. Число Шехеразады.

Чем же замечательно число 1001? С виду оно кажется весьма обыкновенным. Оно даже не принадлежит к избранному разряду так называемых «простых» чисел. Оно делится без остатка и на 7, и на 11, и на 13 — на три последовательных простых числа, произведением которых оно и является. Но не в том диковинка, что $1001 = 7 \times 11 \times 13$, — здесь нет еще ничего волшебного. Замечательнее то, что при умножении на него трехзначного числа получается

результат, состоящий из самого умноженного числа, только написанного дважды, например:

$$873 \times 1001 = 873\,873,$$

$$207 \times 1001 = 207\,207 \text{ и т. д.}$$

И хотя этого и следовало ожидать, так как $873 \times 1001 = 873 \times 1000 + 873 = 873\,000 + 873$, все же, пользуясь указанным свойством «числа Шехеразады», можно достичь результатов совсем неожиданных, кажущихся волшебными, по крайней мере человеку неподготовленному.

Сейчас поясним, в чем дело.

Кружок товарищей, не посвященных в арифметические тайны, вы можете поразить следующим фокусом. Пусть кто-нибудь напишет на бумажке, секретно от вас, трехзначное число, какое хочет, и затем пусть припишет к нему еще раз то же самое число. Получается шестизначное число, состоящее из трех повторяющихся цифр. Предложите тому же товарищу или его соседу разделить, секретно от вас, это число на 7; при этом вы заранее предсказываете, что остатка не получится. Результат передается новому соседу, который, по вашему предложению, делит его на 11; и хотя вы не знаете делимого, вы все же смело утверждаете, что и оно разделится без остатка. Полученный результат вы направляетесь следующему соседу, которого просите разделить это число на 13, — деление снова выполняется без остатка, о чем вы заранее предупреждаете. Результат третьего деления вы, не глядя на полученное число, вручаете первому товарищу со словами:

— Вот число, которое вы задумали!

Так и есть, вы угадали.

Какова разгадка фокуса?

Этот красивый арифметический фокус, производящий на непосвященных впечатление волшебства, объясняется очень просто: вспомните, что приписать к трехзначному числу его само — значит умножить его на 1001, т. е. на произведение $7 \times 11 \times 13$. Шестизначное число, которое ваш товарищ получит после того, как припишет к задуманному числу его само, должно будет поэтому делиться без остатка и на 7, и на 11, и на 13; а в результате деления последовательно на эти три числа (т. е. на их произведение — 1001) оно должно, конечно, снова дать задуманное число.

Выполнение фокуса можно при желании видоизменить так, чтобы иметь возможность объявить загадчику число,

которое получается у него в итоге выкладок. Вы знаете, что шестизначное число, над которым начинают проделывать вычисления, равно произведению (задуманное число) $\times 7 \times 11 \times 13$.

Поэтому если вы попросите разделить шестизначное число сначала на 7, потом на 11, потом на задуманное, то с уверенностью можете объявить конечный итог всех делений — 13.

Повторяя фокус, вы попросите производить деления в ином порядке: сначала на 11, потом на задуманное число и на 13. Последнее деление должно дать в частном 7. Или сначала на 13, потом на задуманное число и на 7; конечный итог — 11.

ЧИСЛО 10 101

После сказанного о числе 1001 уже не будет неожиданностью увидеть в витринах нашей галереи число 10 101. Вы догадываетесь, какому именно свойству обязано это число такую честь. Оно, как и число 1001, дает удивительный

10101

Рис. 30. Число, пригодное для фокусов.

результат при умножении, но не трехзначных чисел, а двузначных; каждое двузначное число, умноженное на 10 101, дает в результате само себя, написанное трижды. Например:

$$\begin{aligned} 73 \times 10\,101 &= 737\,373, \\ 21 \times 10\,101 &= 212\,121. \end{aligned}$$

Причина уясняется из следующей строки:

$$73 \times 10\,101 = 73(10\,000 + 100 + 1) = \begin{cases} 730000 \\ + 7300 \\ \quad 73 \\ \hline 737373 \end{cases}$$

Можно ли проделать с помощью этого числа фокусы необычного отгадывания, как с помощью числа 1001?

Да, можно. Здесь возможно даже обставить фокус разнообразнее, если иметь в виду, что 10 101 есть произведе-

ние четырех простых чисел:

$$10\ 101 = 3 \times 7 \times 13 \times 37.$$

Предложив товарищу задумать какое-нибудь двузначное число, вы предлагаете второму приписать к нему то же число, а третьему — приписать то же число еще раз. Четвертого вы просите разделить получившееся шестизначное число, например, на 7; пятый товарищ должен разделить полученное частное на 3; шестой делит то, что получилось на 37, и, наконец, седьмой делит этот результат на 13, причем все 4 деления выполняются без остатка. Результат последнего деления вы просите передать первому товарищу: это и есть задуманное им число.

При повторении фокуса вы можете внести в него некоторое разнообразие, обращаясь каждый раз к новым делителям. А именно, вместо четырех множителей $3 \times 7 \times 13 \times 37$, можете взять следующие группы трех множителей:

$$21 \times 13 \times 37; 7 \times 39 \times 37; 3 \times 91 \times 37; 7 \times 13 \times 111.$$

Этот фокус легко видоизменить подобно тому, как было объяснено в предыдущем случае (в фокусе с числом 1001).

Число 10 101, пожалуй, даже удивительнее волшебного числа Шехеразады, хотя и менее его известно своими поразительными свойствами. О нем писалось, впрочем, еще двести лет тому назад в «Арифметике» Магницкого, в главе, где приводятся примеры умножения «с неким удивлением». Тем с большим основанием должны мы включить его в наше собрание арифметических диковинок.

ЧИСЛО 10 001

С этим числом вы также можете проделать фокусы вроде предыдущих, хотя, пожалуй, и не столь эффектные. Дело



Рис. 31. Другое число, пригодное для фокусов.

в том, что оно представляет собою произведение только двух простых чисел: $10\ 001 = 73 \times 137$.

Как воспользоваться этим для выполнения арифметических действий «с удивлением», читатель, надеюсь, после всего сказанного выше догадается сам.

ШЕСТЬ ЕДИНИЦ

В следующей витрине мы видим новую диковинку арифметической кунсткамеры — число, состоящее из шести единиц. Благодаря знакомству с волшебными свойствами числа 1001 мы сразу соображаем, что $111\ 111 = 111 \times 1001$.



Рис. 32. Число, пригодное для отгадывания.

Но $111 = 3 \times 37$, а $1001 = 7 \times 11 \times 13$. Отсюда следует, что наш новый числовой феномен, состоящий из одних лишь единиц, представляет собою произведение пяти простых множителей. Соединяя же эти 5 множителей в две группы на всевозможные лады, мы получаем 15 пар множителей, дающих в произведении одно и то же число 111 111:

$$\begin{aligned} 3 \times (7 \times 11 \times 13 \times 37) &= 3 \times 37037 = 111\ 111 \\ 7 \times (3 \times 11 \times 13 \times 37) &= 7 \times 15873 = 111\ 111 \\ 11 \times (3 \times 7 \times 13 \times 37) &= 11 \times 10101 = 111\ 111 \\ 13 \times (3 \times 7 \times 11 \times 37) &= 13 \times 8547 = 111\ 111 \\ 37 \times (3 \times 7 \times 11 \times 13) &= 37 \times 3003 = 111\ 111 \\ (3 \times 7) \times (11 \times 13 \times 37) &= 21 \times 5291 = 111\ 111 \\ (3 \times 11) \times (7 \times 13 \times 37) &= 33 \times 3367 = 111\ 111 \end{aligned}$$

и т. д.

Вы можете, значит, засадить кружок из 15 товарищей за работу умножения, и, хотя каждый будет перемножать другую пару чисел, все получат один и тот же оригинальный результат: 111 111.

То же число 111 111 пригодно и для отгадывания задуманных чисел наподобие того, как выполняется это с помощью чисел 1001 и 10 101. В данном случае нужно пред-

лагать задумать число однозначное, т. е. одну цифру, и повторить ее 6 раз. Делителями здесь могут служить пять простых чисел: 3, 7, 11, 13, 37 — и получающиеся из них составные: 21, 33, 39 и т. д. Это дает возможность до крайности разнообразить выполнение фокуса.

На примере числа 111 111 читатель видит, как можно использовать для арифметических фокусов число, состоящее из одних лишь единиц, если оно разлагается на множители. К счастью для любителей подобных фокусов, многие числа такого начертания составные, а не простые.

Из первых 17 чисел этого рода только два наименьшие — 1 и 11 — простые, остальные — составные. Вот как разлагаются на простые множители первые десять из составных чисел этого начертания:

$$\begin{aligned}
 111 &= 3 \times 37 \\
 1\ 111 &= 11 \times 101 \\
 11\ 111 &= 41 \times 271 \\
 111\ 111 &= 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 \\
 1\ 111\ 111 &= 239 \times 4649 \\
 11\ 111\ 111 &= 11 \times 73 \times 101 \times 137 \\
 111\ 111\ 111 &= 9 \times 37 \times 333\ 667 \\
 1\ 111\ 111\ 111 &= 11 \times 41 \times 271 \times 9091 \\
 11\ 111\ 111\ 111 &= 21\ 649 \times 513\ 239 \\
 111\ 111\ 111\ 111 &= 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 \times 101 \times 9901
 \end{aligned}$$

Не все приведенные здесь числа удобно использовать для отгадывания; в некоторых случаях выполнение фокуса возложило бы на загадчика чересчур обременительную работу. Но числа из 3, из 4, из 5, из 6, из 8, из 9, из 12 единиц более или менее пригодны для этой цели. Образчики использования их для отгадывания будут даны в конце следующей главы.

ЧИСЛОВЫЕ ПИРАМИДЫ

В следующих витринах галереи нас поражают числовые достопримечательности совсем особого рода — некоторое подобие пирамид, составленных из чисел. Рассмотрим поближе первую из них (рис. 33).

Как объяснить эти своеобразные результаты умножения?

Чтобы постичь эту странную закономерность, возьмем для примера какой-нибудь из средних рядов нашей числовой

пирамиды: $123\,456 \times 9 + 7$. Вместо умножения на 9 можно умножить на $(10 - 1)$, т. е. приписать 0 и вычесть множимое:

$$123\,456 \times 9 + 7 = 1\,234\,560 + 7 - 123\,456 = \left\{ \begin{array}{r} 1\,234\,567 \\ - 123\,456 \\ \hline 1\,111\,111 \end{array} \right.$$

Достаточно взглянуть на последнее вычитание, чтобы понять, почему тут получается результат, состоящий только из одних единиц.

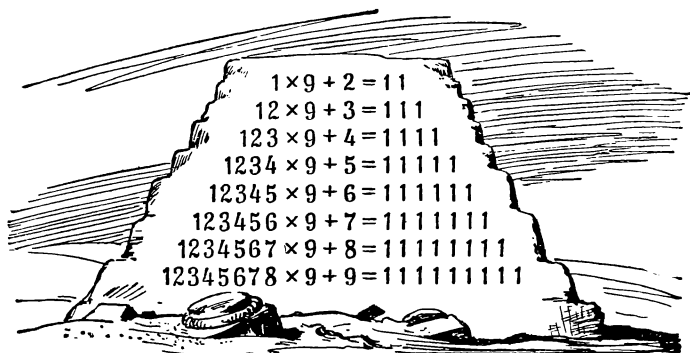


Рис. 33. Первая числовая пирамида

Мы можем уяснить себе это, исходя и из других рассуждений. Чтобы число вида $12\,345\dots$ превратилось в число вида $11\,111\dots$, нужно из второй его цифры вычесть 1, из третьей — 2, из четвертой — 3, из пятой — 4 и т. д., иначе говоря, вычесть из него то же число вида $12\,345\dots$, укороченное на свою последнюю цифру, т. е. вдесятеро уменьшенное и предварительно лишенное последней цифры. Теперь понятно, что для получения искомого результата нужно наше число умножить на 10, прибавить к нему следующую за последней цифру и вычесть из результата первоначальное число (а умножить на 10 и отнять множимое — значит умножить на 9).

Сходным образом объясняется образование и следующей числовой пирамиды (рис. 34), получающейся при умножении определенного ряда цифр на 8 и прибавлении последовательно возрастающих цифр. Особенно интересна в пирамиде последняя строка, где в результате умножения на 8 и при-

бавления 9 происходит превращение полного натурального ряда цифр в такой же ряд, но с обратным расположением.

Попытаемся объяснить эту особенность.

Получение странных результатов уясняется из следующей строки:

$$12\,345 \times 8 + 5 = \left\{ \begin{array}{l} 12\,345 \times 9 + 6 \\ 12\,345 \times 1 + 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 111\,111^1) \\ 12\,346, \end{array} \right.$$

т. е. $12\,345 \times 8 + 5 = 111\,111 - 12\,346$. Но, вычитая из числа 111 111 число 12 346, составленное из ряда возрастающих

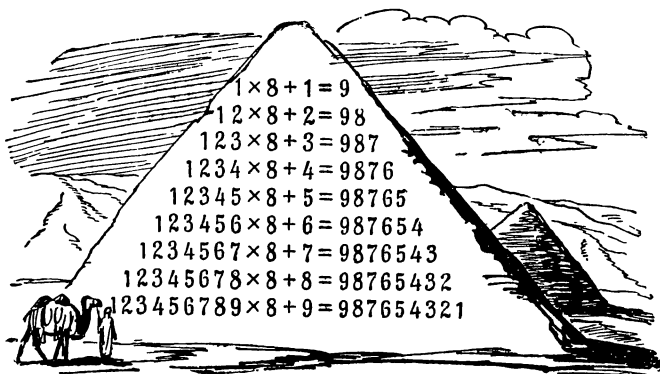


Рис. 34. Вторая числовая пирамида.

цифр, мы, как легко понять, должны получить ряд убывающих цифр 98 765.

Вот, наконец, третья числовая пирамида, также требующая объяснения (рис. 35).

Эта пирамида является прямым следствием первых двух. Связь устанавливается очень легко. Из первой пирамиды мы знаем уже, что, например:

$$12\,345 \times 9 + 6 = 111\,111.$$

Умножив обе части на 8, имеем:

$$(12\,345 \times 8 \times 9) \times (6 \times 8) = 888\,888.$$

Но из второй пирамиды известно, что

$$12\,345 \times 8 + 5 = 98\,765 \text{ или } 12\,345 \times 8 = 98\,760.$$

¹⁾ Почему $12\,345 \times 9 + 6$ дает именно 111 111, было показано при рассмотрении предыдущей числовой пирамиды.

Значит,

$$\begin{aligned} 888\ 888 &= (12\ 345 \times 8 \times 9) + (6 \times 8) = (98\ 760 \times 9) + 48 = \\ &= (98\ 760 \times 9) + (5 \times 9) + 3 = (98\ 760 + 5) \times 9 + 3 = \\ &= 98\ 765 \times 9 + 3. \end{aligned}$$

Вы убеждаетесь, что все эти числовые пирамиды не так уж загадочны, как кажутся с первого взгляда. Но многие

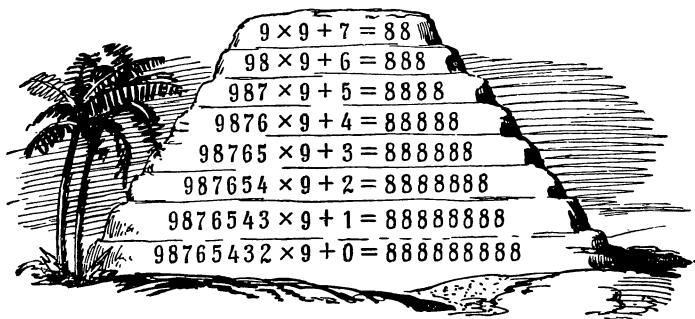


Рис. 35. Третья числовая пирамида.

считают их все же неразгаданными. Мне случилось как-то видеть их напечатанными в одной немецкой газете с припиской: «Причина такой поразительной закономерности никем еще до сих пор не была объяснена»...

ДЕВЯТЬ ОДИНАКОВЫХ ЦИФР

Конечная строка первой из рассмотренных «пирамид» (рис. 33)

$$12\ 345\ 678 \times 9 + 9 = 111\ 111\ 111$$

представляет образчик целой группы интересных арифметических курьезов, собранной в нашем музее в таблицу (см. рис. 36).

Откуда такая закономерность в результатах?

Примем во внимание, что

$$12\ 345\ 678 \times 9 + 9 = (12\ 345\ 678 + 1) \times 9 = 12\ 345\ 679 \times 9.$$

Поэтому

$$12\ 345\ 679 \times 9 = 111\ 111\ 111.$$

А отсюда прямо следует, что

$$12\,345\,679 \times 9 \times 2 = 222\,222\,222$$

$$12\,345\,679 \times 9 \times 3 = 333\,333\,333$$

$$12\,345\,679 \times 9 \times 4 = 444\,444\,444$$

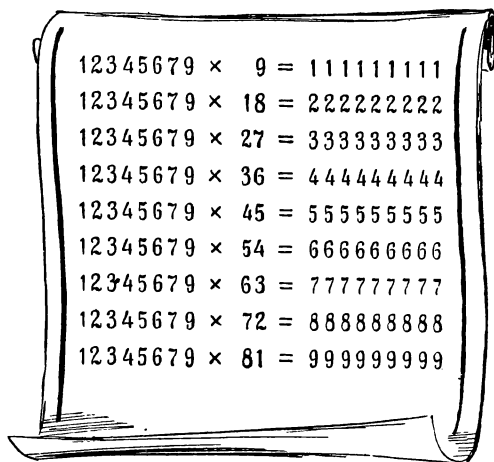


Рис. 36. Своеобразные случаи умножения.

ЦИФРОВАЯ ЛЕСТНИЦА

Любопытно, что получится, если число 111 111 111, с которым мы сейчас имели дело, умножить само на себя? Заранее можно подозревать, что результат должен быть диковинный, но какой именно?

Если вы обладаете способностью четко рисовать в воображении ряды цифр, вам удастся найти интересующий нас результат, даже не прибегая к выкладкам на бумаге. В сущности, здесь дело сводится только к надлежащему расположению частных произведений, потому что умножать придется все время лишь единицу на единицу — действие, могущее затруднить разве лишь фонвизинского Митрофанушку, размышлявшего о результате умножения «единожды един». Сложение же частных произведений сводится к простому счету единиц¹⁾. Вот результат этого единственного

¹⁾ В двоичной системе счисления, как мы уже объяснили (см. стр. 73), все умножения именно такого рода. На этом примере еще раз наглядно убеждаемся в преимуществах двоичной системы.

в своем роде умножения (при выполнении которого не приходится ни разу прибегать к действию умножения):

$$\begin{array}{r}
 11111111 \\
 11111111 \\
 \hline
 11111111 \\
 11111111 \\
 11111111 \\
 11111111 \\
 11111111 \\
 11111111 \\
 11111111 \\
 11111111 \\
 11111111 \\
 11111111 \\
 11111111 \\
 11111111 \\
 11111111 \\
 \hline
 12345678987654321
 \end{array}$$

Цифры результата симметрично убывают от середины в обе стороны.

Те из читателей, которых утомило обозрение числовых диковинок, могут покинуть здесь «галерею» и перейти в следующие отделения, где показываются фокусы и выставлены числовые великаны и карлики; я хочу сказать, что они могут прекратить чтение этой главы и обратиться к дальнейшим. Но, кто желает познакомиться еще с несколькими достопримечательностями мира чисел, тех приглашаю осмотреть со мною небольшой ряд ближайших витрин.

Числовые диковинки, о которых сейчас пойдет речь, потребуют от читателей знакомства с так называемыми бесконечными периодическими дробями. Тем, кто не знаком с ними, предлагаю превратить по общеизвестному способу следующие обыкновенные дроби в десятичные:

$$\frac{1}{4}; \quad \frac{1}{8}; \quad \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{11}.$$

Легко убедиться, что первые две дроби при превращении в десятичные дают конечное число цифр: $\frac{1}{4}=0,25$; $\frac{1}{8}=0,125$. При превращении же в десятичные остальных дробей получаются бесконечные ряды цифр, повторяющихся в определенном порядке:

$$\frac{1}{3}=0,3333 \dots; \quad \frac{1}{11}=0,09090909\dots$$

Такие дроби называются **периодическими**, а повторяющаяся в них группа цифр — **периодом**.

МАГИЧЕСКИЕ КОЛЬЦА

Что за странные кольца выставлены в следующей витрине нашей галереи! Перед нами (рис. 37) три плоских кольца, вращающихся одно в другом.

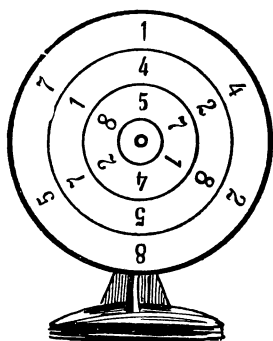


Рис. 37. Вращающиеся числовые кольца.

На каждом кольце написаны шесть цифр в одном и том же порядке, именно они образуют число: 142 857. Кольца обладают следующим удивительным свойством: как бы ни были они повернуты, мы при сложении двух написанных на них чисел — считая от любой цифры в направлении часовой стрелки — получим во всех случаях то же самое шестизначное число (если только результат вообще будет шестизначный), лишь немного подвинутое! В том положении, например, какое изображено на при-

лагаемом чертеже, мы получаем при сложении двух наружных колец:

$$\begin{array}{r} + 142\,857 \\ + 428\,571 \\ \hline 571\,428, \end{array}$$

т. е. опять тот же ряд цифр: 142 857, только цифры 5 и 7 перенеслись из конца в начало.

При другом расположении колец относительно друг друга имеем такие случаи:

$$\begin{array}{r} + 285\,714 \\ + 571\,428 \\ \hline 857\,142 \end{array} \quad \begin{array}{r} + 714\,285 \\ + 142\,857 \\ \hline 857\,142 \end{array} \quad \text{и т. д.}$$

Исключение составляет случай, когда в результате получается 999 999:

$$\begin{array}{r} + 285\,714 \\ + 714\,285 \\ \hline 999\,999 \end{array}$$

(Причину других отступлений от указанного правила читатель поймет, когда дочитает эту статью до конца.)

Мало того. Тот же ряд цифр в той же последовательности получим и при в ы ч и т а н и и чисел, написанных на кольцах.

Н а п р и м е р:

$$\begin{array}{r} \text{—} 428\,571 \\ \text{—} 142\,857 \\ \hline 285\,714 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{—} 571\,428 \\ \text{—} 285\,714 \\ \hline 285\,714 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{—} 714\,285 \\ \text{—} 142\,857 \\ \hline 571\,428 \end{array}$$

Исключение составляет случай, когда приведены к совпадению одинаковые цифры; разумеется, разность равна нулю.

Но и это еще не все. У м н о ж ь т е число 142 857 на 2, на 3, на 4, на 5 или на 6 — и вы получите снова то же число, лишь передвинутое, в круговом порядке, на одну или несколько цифр:

$$\begin{array}{l} 142\,857 \times 2 = 285\,714 \\ 142\,857 \times 3 = 428\,571 \\ 142\,857 \times 4 = 571\,428 \\ 142\,857 \times 5 = 714\,285 \\ 142\,857 \times 6 = 857\,142 \end{array}$$

Чем же обусловлены все эти загадочные особенности нашего числа?

Мы нападём на путь к разгадке, если продлим немного последнюю табличку и попробуем умножить наше число на 7: в результате получится 999 999. Значит, число 142 857 не что иное, как седьмая часть 999 999, и, следовательно, дробь $\frac{142\,857}{999\,999} = \frac{1}{7}$. Действительно, если станете превра-

щать $\frac{1}{7}$ в десятичную дробь, вы получите:

$$\begin{array}{r} 1:7 = 0,142\,857\dots, \text{ т. е. } \frac{1}{7} = 0,(142\,857) \\ \begin{array}{r} 10 \\ \text{—} 30 \\ 20 \\ \text{—} 60 \\ 40 \\ \text{—} 50 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

Наше загадочное число есть период бесконечной периодической дроби, которая получается при превращении $\frac{1}{7}$,

в десятичную. Становится понятным теперь, почему при удвоении, утроении и т. д. этого числа происходит лишь перестановка одной группы цифр на другое место. Ведь умножение этого числа на 2 делает его равным $\frac{2}{7}$ и, следовательно, равносильно превращению в десятичную дробь уже не $\frac{1}{7}$, а $\frac{2}{7}$. Начав же превращать дробь $\frac{2}{7}$ в десятичную, вы сразу заметите, что цифра 2 — один из тех остатков, которые у нас уже получались при превращении $\frac{1}{7}$: ясно, что должен повториться и прежний ряд цифр частного, но начнется он с другой цифры; иными словами, должен получиться тот же период, но только несколько начальных цифр его очутятся на конце. То же самое произойдет и при умножении на 3, на 4, на 5 и 6, т. е. на все числа получающиеся в остатках. При умножении же на 7 мы должны получить единицу, или — что то же самое — 0,9999...

Любопытные результаты сложения и вычитания чисел на кольцах находят себе объяснение в том же факте, что 142 857 есть период дроби, равной $\frac{1}{7}$. В самом деле, что мы собственно делаем, поворачивая кольцо на несколько цифр? Переставляем группу цифр с начала на конец, т. е., согласно только что сказанному, умножаем число 142 857 на 2, на 3, на 4 и т. д. Следовательно, все действия сложения или вычитания чисел, написанных на кольцах, сводятся к сложению или вычитанию дробей $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$ и т. д. В результате мы должны получить, конечно, несколько седьмых долей, т. е. опять-таки наш ряд цифр 142 857 в той или иной круговой перестановке. Отсюда надо исключить лишь случай, когда складываются такие числа седьмых долей, которые в сумме дают единицу или больше 1.

Но и последние случаи исключаются не вполне: они дают результат, правда, не тождественный с рассмотренными, но все же сходный с ними. Рассмотрим внимательно, что должно получиться от умножения нашего загадочного числа на множитель больше 7, т. е. на 8, на 9 и т. д. Умножить 142 857, например, на 8 мы можем так: умножить сначала на 7 и к произведению (т. е. к 999 999) прибавить наше число:

$$142\,857 \times 8 = 142\,857 \times 7 + 142\,857 = 999\,999 + 142\,857 = \\ = 1\,000\,000 - 1 + 142\,857 = 1\,000\,000 + (142\,857 - 1).$$

Окончательный результат — 1 142 856 — отличается от умножаемого 142 857 только тем, что впереди стоит еще одна единица, а последняя цифра на единицу же уменьшена. По сходному правилу составляются произведения 142 857 на всякое другое число большее 7, как легко усмотреть из следующих строк:

$$\begin{array}{lcl}
 142\,857 \times 8 = (142\,857 \times 7) & + & 142\,857 = 1\,142\,856 \\
 142\,857 \times 9 = (142\,857 \times 7) & + & (142\,857 \times 2) = 1\,285\,713 \\
 142\,857 \times 10 = (142\,857 \times 7) & + & (142\,857 \times 3) = 1\,428\,570 \\
 142\,857 \times 16 = (142\,857 \times 7 \times 2) & + & (142\,857 \times 2) = 2\,285\,712 \\
 142\,857 \times 39 = (142\,857 \times 7 \times 5) & + & (142\,857 \times 4) = 5\,571\,423
 \end{array}$$

Общее правило здесь такое: при умножении 142 857 на любой множитель нужно умножить лишь на остаток от деления множителя на 7; впереди этого произведения ставится число, показывающее, сколько семерок в множителе, и то же число вычитается из результата¹⁾. Пусть мы желаем умножить 142 857 на 88. Множитель 88 при делении на 7 дает в частном 12 и в остатке 4. Следовательно, результат умножения таков:

$$12\,571\,428 - 12 = 12\,571\,416.$$

От умножения $142\,857 \times 365$ мы получим (так как 365 при делении на 7 дает в частном 52, а в остатке 1):

$$52\,142\,857 - 52 = 52\,142\,805.$$

Усвоив это простое правило и запомнив результаты умножения нашего диковинного числа на множители от 2 до 6 (что весьма нетрудно, нужно помнить лишь, с какой цифры они начинаются), вы можете изумлять непосвященных молниеносным умножением шестизначного числа. А чтобы не забыть этого удивительного числа, заметим, что оно произошло от $\frac{1}{7}$, или — что то же самое — от $\frac{2}{14}$; вот вам первые три цифры нашего числа: 142. Остальные три получаются вычитанием первых трех из 999:

$$\begin{array}{r}
 999 \\
 - 142\,857 \\
 \hline
 857
 \end{array}$$

¹⁾ Если множитель кратен 7, то результат равен числу 999 999, умноженному на число семерок в множителе; такое умножение легко выполнить в уме. Например, $142\,857 \times 28 = 999\,999 \times 4 = 4\,000\,000 - 4 = 3\,999\,996$.

Мы уже имели дело с такими числами, именно когда знакомились со свойствами числа 999. Вспомнив сказанное там, мы сразу сообразим, что число 142 857 есть, очевидно, результат умножения 143 на 999:

$$142\,857 = 143 \times 999.$$

Но $143 = 13 \times 11$. Припомнив замеченное раньше о числе 1001, равном $7 \times 11 \times 13$, мы будем в состоянии, не выполняя действия, предсказать, что должно получиться от умножения $142\,857 \times 7$:

$$\begin{aligned} 142\,857 \times 7 &= 143 \times 999 \times 7 = 999 \times 11 \times 13 \times 7 = \\ &= 999 \times 1001 = 999\,999 \end{aligned}$$

(все эти преобразования мы, конечно, можем проделать в уме).

ФЕНОМЕНАЛЬНАЯ СЕМЬЯ

Только что рассмотренное число 142 857 является одним из членов целого семейства чисел, обладающих теми же свойствами. Вот еще одно такое число: 0 588 235 294 117 647 (0 впереди необходим). Если умножить это число, например, на 4, мы получим тот же ряд цифр, только первые 4 цифры будут переставлены в конец:

$$0\,588\,235\,294\,117\,647 \times 4 = 2\,352\,941\,176\,470\,588.$$

Расположив цифры этого числа на нескольких подвижных кольцах (рис. 38), как в предыдущем случае, мы при сложении чисел двух колец будем получать то же число, лишь смещенное в круговом порядке:

$$\begin{array}{r} + \quad 0\,588\,235\,294\,117\,647 \\ \quad 2\,352\,941\,176\,470\,588 \\ \hline 2\,941\,176\,470\,588\,235 \end{array}$$

При кольцевом расположении все три ряда, конечно, тождественны.

От вычитания чисел двух колец опять-таки получается тот же круг цифр:

$$\begin{array}{r} \quad 2\,352\,941\,176\,470\,588 \\ - \quad 0\,588\,235\,294\,117\,647 \\ \hline 1\,764\,705\,882\,352\,941 \end{array}$$

Наконец, это число, как и рассмотренное ранее, состоит из двух половин: цифры второй половины являются дополнением цифр первой половины до 9.

Попробуем найти разгадку всех этих особенностей.

Нетрудно догадаться, каким образом приведенный числовой ряд оказался близким родственником числа 142 857; последнее число представляет собою период бесконечной дроби, равной $\frac{1}{7}$, новое же число является, вероятно, периодом какой-нибудь другой дроби. Так и есть, наш длинный ряд цифр — не что иное, как период бесконечной дроби, получающийся от превращения в десятичную простую дробь $\frac{1}{17}$:

$$\frac{1}{17} = 0, (0588235294117647).$$

Вот почему при умножении этого числа на множители от 1 до 16 получается тот же ряд цифр, в котором лишь одна или несколько начальных цифр перенесены в конец числа. И наоборот, перенося одну или несколько цифр ряда из начала в конец, мы тем самым увеличиваем число в несколько раз (от 1 до 16 включительно). Складывая два кольца, повернутых одно относительно другого, мы производим сложение двух умноженных чисел — например, утроенного и удесятеренного — и, конечно, должны получить то же кольцо цифр, потому что умножение на 3+10, т. е. на 13, вызывает лишь перестановку группы цифр, незаметную при круговом расположении.

При некотором положении колец получаются однако суммы, немного отличающиеся от первоначального ряда. Если, например, повернем кольцо так, чтобы складывать пришлось шестикратное число с пятнадцатикратным, то в сумме должно получиться число, умноженное на $6+15=21$. А такое произведение, как легко догадаться, составляется уже несколько иначе, чем произведение на множитель, меньший 17. В самом деле, так как наше число есть период дроби, равной $\frac{1}{17}$, то, будучи умножено на 17, оно должно дать 16 девяток (т. е. столько, сколько цифр в периоде нашей периодической дроби), или 1 с 17 нулями минус 1.

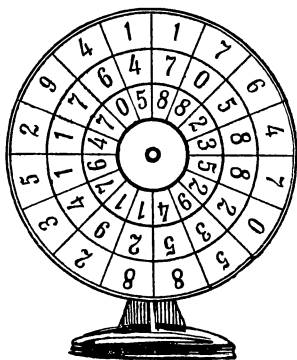


Рис. 38. Еще одно удивительное число.

Поэтому при умножении на 21, т. е. на $4+17$, мы должны получить четырехкратное наше число, впереди которого стоит 1, а от разряда единиц отнята 1. Четырехкратное же число начнется с цифр, получающихся при превращении в десятичную дробь простой дроби $\frac{4}{17}$:

$$\begin{array}{r} 4:17=0,23... \\ \underline{40} \\ 60 \\ \underline{60} \\ 9 \end{array}$$

Порядок остальных цифр известен: 5294... Значит, 21-кратное наше число будет

$$2\ 352\ 941\ 176\ 470\ 587.$$

Столько и получается от сложения кругов цифр при соответственном их расположении. При вычитании числовых колец такого случая, разумеется, быть не может.

Чисел, подобных тем двум, с которыми мы познакомились, существует множество. Они составляют целое семейство, так как объединены общим происхождением — от превращения простых дробей в бесконечные десятичные. Но не всякий период десятичной дроби обладает рассмотренным выше любопытным свойством давать при умножении круговую перестановку цифр. Не вдаваясь в тонкости теории, отметим, что это имеет место только для тех дробей, **цифр периода которых на единицу меньше знаменателя** соответствующей простой дроби. Так, например,

$\frac{1}{7}$	дает в периоде	6 цифр	
$\frac{1}{17}$	»	»	16 »
$\frac{1}{19}$	»	»	18 »
$\frac{1}{23}$	»	»	22 »
$\frac{1}{29}$	»	»	28 »

Если указанное сейчас условие (относительно числа цифр периода) не соблюдено, то соответствующий период дает число, не принадлежащее к занимающей нас семье интересных чисел. Например, $\frac{1}{13}$ дает десятичную дробь с шестью (а не с 12) цифрами в периоде:

$$\frac{1}{13}=0,076923.$$

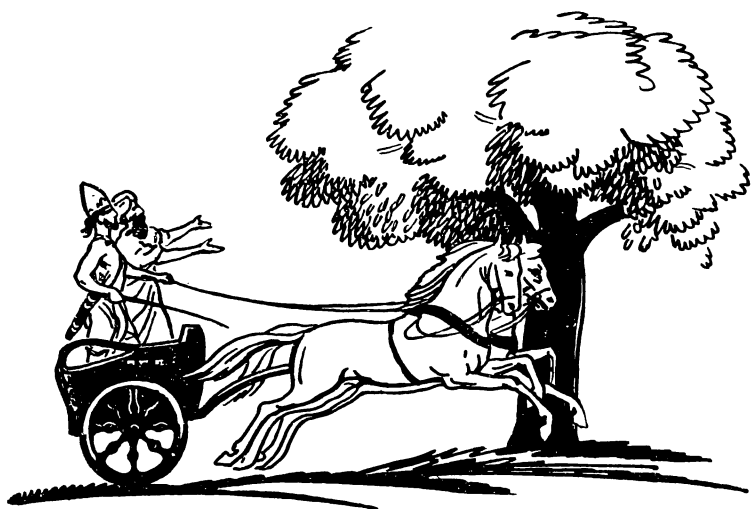
Помножив на 2, получаем совершенно иное число:

$$^2/_{13}=0,153846.$$

Почему? Потому что среди остатков от деления $1 : 13$ не было числа 2. Р а з л и ч н ы х остатков было столько, сколько цифр в периоде, т. е. 6; различных же множителей для дроби $^1/_{13}$ у нас 12; следовательно, не все множители будут среди остатков, а только 6. Легко убедиться, что эти множители следующие: 1, 3, 4, 9, 10, 12. Умножение на эти 6 чисел дает круговую перестановку ($076\ 923 \times 3 = 230\ 769$), на остальные — нет. Вот почему от $^1/_{13}$ получается число, лишь отчасти пригодное для «магического кольца».

Арифметические курьезы

$$100 = \left\{ \begin{array}{l} 91 + \frac{5823}{647} \\ 94 + \frac{1578}{263} \\ 96 + \frac{1428}{357} \end{array} \right.$$



ГЛАВА ШЕСТАЯ ФОКУСЫ БЕЗ ОБМАНА

ИСКУССТВО ИНДИЙСКОГО СЧЕТЧИКА

Арифметические фокусы — честные, добросовестные фокусы. Здесь не стремятся обмануть, не стараются усыпить внимание зрителя. Чтобы выполнить арифметический фокус, не нужны ни чудодейственная ловкость рук, ни изумительное проворство движений, ни какие-либо другие артистические способности, требующие иногда многолетних упражнений. Весь секрет арифметического фокуса состоит в тщательном изучении и использовании любопытных свойств чисел, в близком знакомстве с их особенностями. Кто знает разгадку такого фокуса, тому все представляется простым и ясным; а для незнающего арифметики и самое обычное действие кажется уже чем-то вроде фокуса.

Было время, когда умение выполнять даже обыкновенные арифметические действия над большими числами, знакомое теперь каждому школьнику, составляло искусство

лишь немногих и казалось остальным какой-то сверхъестественной способностью. В древнеиндийской повести «Наль и Дамаянти»¹⁾ находим отголосок такого взгляда на арифметические действия. Наль, умевший превосходно править лошадьми, вез однажды счетчика-виртуоза Ритуперна мимо развесистого дерева — Вибитак.

Вдруг он увидел вдали Вибитак — ветвисто-густую
Сенью покрытое дерево. «Слушай,— сказал он.—
Здесь на земле никто не имеет всезнания; в искусстве
Править конями ты первый; зато мне далось искусство
Счета...»

И в доказательство своего искусства счетчик мгновенно сосчитал число листьев на ветвистой Вибитак. Изумленный Наль просит Ритуперна открыть ему тайну его искусства, и тот соглашается.

«... Лишь только
Вымолвил слово свое Ритуперн, как у Наль открылись
Очи, и он все ветки, плоды и листья Вибитак
Разом мог перечесать...»

Секрет искусства состоял, как можно догадаться, в том, что непосредственный счет листьев, требующий много времени и терпения, заменялся счетом листьев одной лишь ветки и умножением этого числа на число веток каждого сука и далее — на число сучьев дерева (предполагая, что все сучья одинаково обросли ветками, а ветки — листьями).

Разгадка большинства арифметических фокусов столь же проста, как и тайна «фокуса» Ритуперна. Стоит лишь узнать, в чем секрет фокуса, и вы сразу овладеваете искусством его выполнять, как овладел легендарный Наль изумительным искусством быстрого счета. В основе каждого арифметического фокуса лежит какая-нибудь интересная особенность чисел, и поэтому знакомство с подобными фокусами не менее поучительно, чем занимательно.

НЕ ОТКРЫВАЯ КОШЕЛЬКОВ

Фокусник высыпает на стол кучу монет на сумму 3 руб. и предлагает вам задачу: разложить деньги по 9 кошелькам так, чтобы можно было уплатить любую сумму до 3 руб., не открывая кошельков.

¹⁾ Русский перевод (вольный) Жуковского. Эпизод, о котором далее идет речь, описан в главе VIII этой повести.

Это может показаться совершенно невыполнимым. Не думайте, однако, что фокусник расставил вам ловушку из игры слов или из неожиданного их толкования. Посмотрите: фокусник сам берется за дело. Разложив монеты по кошелькам и привязав к каждому ярлычок с обозначением вложенной суммы (см.рис. 39), он предлагает вам назначить любую сумму не выше 3 руб.

Вы называете первую пришедшую на ум: 2 р. 69 к.

Без малейшего промедления фокусник отбирает и подает вам 4 кошелька. Вы открываете их и находите:

в одном.	— р. 64 к.
» другом	— » 45 »
» третьем	1 » 28 »
» четвертом	— » 32 »
<hr/>	
Итого. . . 2 р.	69 к.

Вы готовы заподозрить фокусника в ловкой подмене кошельков и требуете повторения фокуса. Он пододвигает все кошельки к вам, и когда вы называете новую сумму — например, 1 руб., или 7 коп., или 2 р. 93 к., — немедленно указывает, какие из лежащих у вас под рукой кошельков должны вы взять, чтобы составила назначенная вами сумма. А именно:

Для 1 руб. — 6 кошельков (32 коп., 1 коп., 45 коп., 16 коп., 2 коп., 4 коп.).

Для 7 коп. — 3 кошелька (1 коп., 2 коп., 4 коп.).

Для 2 р. 93 к. — 7 кошельков (1 р. 28 к., 32 коп., 8 коп., 45 коп., 64 коп., 16 коп.).

Кошельки по приказу фокусника оказываются всегда готовы составить любую названную сумму (до 3 руб.).

Чем это объяснить?

Секрет кроется в том, чтобы разложить монеты следующим образом: 1 коп., 2 коп., 4 коп., 8 коп., 16 коп., 32 коп., 64 коп., 128 коп. и, наконец, в последний кошелек — ос-

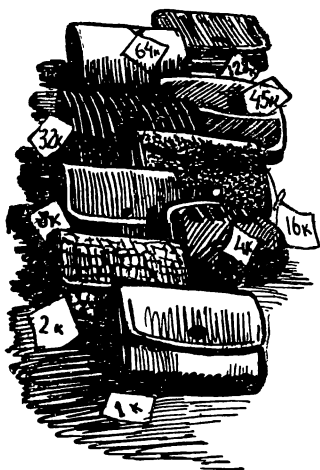


Рис. 39. Фокус с девятью кошельками.

тальные деньги, т. е.

$$300 - (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128) = \\ = 300 - 255 = 45 \text{ коп.}$$

Из первых 8 кошельков возможно, как нетрудно убедиться, составить любую сумму от 1 до 255 коп.; если же задается сумма большая, то пускают в дело последний кошелек с 45 коп., а разницу составляют из первых восьми кошельков.

Вы можете проверить пригодность такой группировки чисел многочисленными пробами и убедиться, что из них можно действительно составить всякое число, не превышающее 300. Но вас, вероятно, интересует и то, почему собственно ряд чисел 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 и т.д. обладает столь замечательным свойством. Это нетрудно понять, если вспомнить, что числа нашего ряда представляют степени числа $2: 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ и т. д.¹⁾, и, следовательно, их можно рассматривать как разряды двоичной системы счисления. А так как всякое число можно написать по двоичной системе, то значит и всякое число возможно составить из суммы степеней 2, т. е. из чисел ряда 1, 2, 4, 8, 16 и т. д. И когда вы подбираете кошельки, чтобы составить из их содержимого заданное число, вы, в сущности, выражаете заданное число в двоичной системе счисления. Например, число 100 легко составить, если изобразить его в двоичной системе:

$$\begin{array}{r} 100 \mid 2 \\ \hline 0 \mid 50 \mid 2 \\ \hline 0 \mid 25 \mid 2 \\ \hline 1 \mid 12 \mid 2 \\ \hline 0 \mid 6 \mid 2 \\ \hline 0 \mid 3 \mid 2 \\ \hline 1 \mid 1 \end{array}$$

$$100 = \begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 64 & 32 & (16) & (8) & 4 & (2) & (1) \end{array}$$

$$100 = 64 + 32 + 4$$

Напомним, что в двоичной системе на первом месте с п р а в а стоят единицы, на втором — двойки, на третьем — четверки, на четвертом — восьмерки и т. д.

¹⁾ Проходившие алгебру знают, что число 1 можно рассматривать как 2 в нулевой степени.

УГАДАТЬ ЧИСЛО СПИЧЕК

Свойством двоичной системы можно воспользоваться и для следующего фокуса. Вы предлагаете кому-нибудь положить на стол неполный коробок со спичками, а рядом слева от него положить 7 бумажек прямоугольной формы. Затем просите в вашем отсутствии проделать следующее: оставив половину спичек в коробке, перенести другую половину на ближайшую бумажку; если число спичек

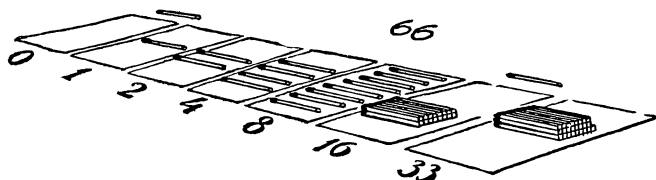


Рис. 40. Отгадывание числа спичек. Последовательные действия загадчика.

нечетное, то излишнюю спичку положить рядом с бумажкой. Спички, очутившиеся на бумажке, надо (не трогая лежащей рядом) разделить на две равные части: одну половину

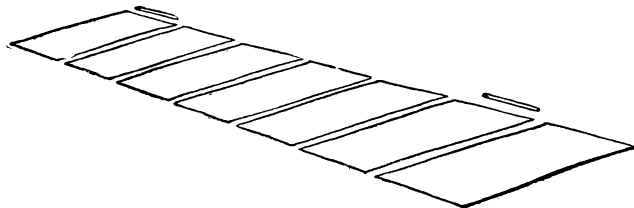


Рис. 41. Продолжение фокуса: окончательный вид бумажек.

положить в коробок, другую—переложить на следующую бумажку; в случае нечетного числа остающуюся спичку положить рядом со второй бумажкой. Далее поступать таким же образом, возвращая всякий раз половину спичек обратно в коробок, а другую половину — перекладывая на следующую бумажку, не забывая при нечетном числе спичек класть одну спичку рядом. В конце концов все спички, кроме одиночных, лежащих рядом с бумажками, возвратятся в коробок (см. рис. 40 и 41).

Когда это сделано, вы являетесь в комнату и, бросив взгляд на пустые бумажки, называете число спичек во взятом коробке.

Как можно по пустым бумажкам и случайным единичным спичкам догадаться о первоначальном числе спичек в коробке?

Эти «пустые» бумажки в данном случае очень красноречивы: по ним и по одиночным спичкам можно буквально прочесть искомое число, потому что оно написано

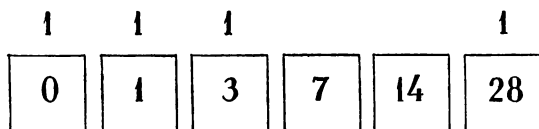


Рис. 42. Другой случай отгадывания. Начало фокуса.

на столе — в двоичной системе счисления. Поясним это на примере. Пусть число спичек в коробке было 66. Последовательные операции с ними и окончательный вид бумажек показаны на схемах рис. 40 и 41.

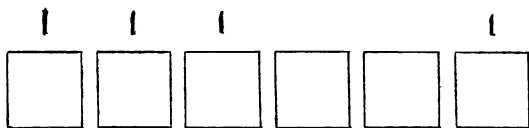


Рис. 43. Конец фокуса.

Нетрудно сообразить, что сделанные со спичками операции, в сущности, те же самые, какие мы выполнили бы, если бы хотели выразить число спичек в коробке по двоичной системе счисления; окончательная же схема прямо изобразит это число в двоичной системе, если пустые бумажки принять за нули, а бумажки, отмеченные сбоку спичкой, — за единицы. Читая схему слева направо, получаем:

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 64 & (32) & (16) & (8) & (4) & 2 & (1)
 \end{array}$$

в десятичной же системе: $64 + 2 = 66$.

Если бы было 57 спичек, мы имели бы иные схемы, показанные на рис. 42 и 43.

Искомое число, написанное по двоичной системе:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 32 & 16 & 8 & (4) & (2) & 1 \end{array}$$

А в десятичной системе: $32 + 16 + 8 + 1 = 57$.

«ЧТЕНИЕ МЫСЛЕЙ» ПО СПИЧКАМ

Третье видоизменение того же фокуса представляет собою своеобразный способ отгадывания задуманного числа по спичкам. Загадавший должен мысленно делить задуманное число пополам, полученную половину опять пополам и т. д. (от нечетного числа отбрасывая единицу) — и при каждом делении кладет перед собою спичку, направленную в д о л ь стола, если делится число четное, и п о п е р е к, если приходится делить нечетное. К концу операции получается фигура вроде показанной на рис. 44.



Рис. 44. Отгадывание задуманного числа по спичкам: что делает загадчик.

Вы всматриваетесь в эту фигуру и безошибочно называете задуманное число: 137.

Как вы узнаете его?

Способ станет ясен сам собою, если в выбранном примере (137) последовательно обозначить возле каждой спички то число, при делении которого она была положена (рис. 45).

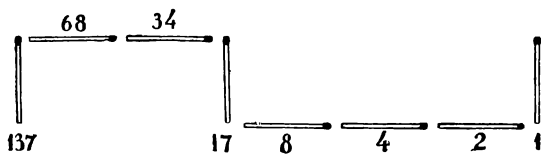


Рис. 45. Секрет фокуса: что делает отгадчик.

Теперь понятно, что так как последняя спичка во всех случаях означает число 1, то не составляет труда, восходя от нее к предшествующим делениям, добраться до первоначально задуманного числа. Например, по фигуре рис. 46 вы можете вычислить, что задумано было число 664.

или по десятичной системе:

$$512 + 128 + 16 + 8 = 664.$$

Попробуйте узнать, какое число задумано, если получилась фигура рис. 48.

Узнать это нетрудно. В самом деле, числу «10 010 101» в двоичной системе соответствует в десятичной:

$$128 + 16 + 4 + 1 = 149.$$

Необходимо заметить, что получаемая при последнем делении единица также должна быть отмечена с т о я щ е й спичкой.

ИДЕАЛЬНЫЙ РАЗНОВЕС

У некоторых читателей, вероятно, возник уже вопрос: почему для выполнения описанных раньше опытов мы пользуемся именно д в о и ч н о й системой? Ведь каждое число можно изобразить в любой системе, между прочим и в десятичной. Чем же объясняется предпочтение здесь двоичной?

Объясняется это тем, что в этой системе, кроме нуля, употребляется всего о д н а цифра — единица, а следовательно, число составляется из различных степеней 2, взятых только п о о д н о м у р а з у. Если бы в фокусе с кошельками мы распределили деньги, например, по пятеричной системе, то могли бы составить, не раскрывая кошельков, любую сумму лишь в том случае, когда каждый из кошельков повторяется у нас не менее 4 раз (в пятеричной системе употребляются ведь, кроме нуля, 4 цифры).

Впрочем, бывают случаи, когда для подобных надобностей удобнее пользоваться не двоичной, а т р о и ч н о й системой, несколько видоизмененной. Сюда относится знаменитая старинная «задача о гирях», которая может послужить сюжетом и для арифметического фокуса.

Представьте, что вам предложили придумать набор из 4 гирь, с помощью которых возможно было бы отвесить любое целое число килограммов от 1 до 40. Двоичная система подсказывает вам набор:

$$1 \text{ кг}, 2 \text{ кг}, 4 \text{ кг}, 8 \text{ кг}, 16 \text{ кг},$$

которым можно отвешивать все грузы от 1 до 31 кг. Но это очевидно не удовлетворяет требуемым условиям ни по числу гирь, ни по предельному грузу (31 кг вместо 40). С другой стороны, вы не использовали здесь возможности класть

гири не только на одну чашку весов, но и на две, т. е. обходиться не только суммой гирь, но и их разностью. Последнее дает так много разнообразных комбинаций, что вы совершенно теряетесь в поисках, не умея уложить их в какую-либо систему.

Если вам не посчастливится напасть на правильный путь, вы готовы будете даже сомневаться вообще в разрешимости задачи столь малым числом гирь, как четыре.

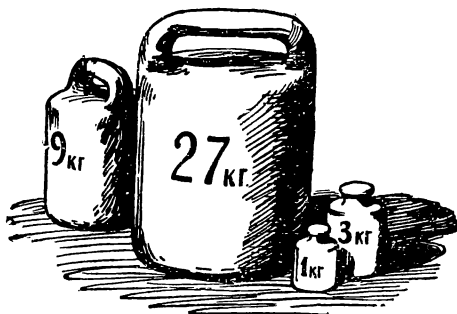


Рис. 49. С помощью этих 4 гирь можно взвесить любой груз от 1 до 40 кг.

Посвященный выходит из этого затруднения с волшебной простотой, намечая следующие 4 гири (рис. 49):

1 кг, 3 кг, 9 кг, 27 кг.

Любое целое число килограммов, до 40 кг, вы можете отвесить такими гирями, кладя их то на одну, то на обе чашки весов (см. таблицу на стр. 114).

Мы не приводим примеров, потому что каждый легко может сам убедиться в полной пригодности такого набора гирь для нашей цели. Остановимся лучше на том, почему именно указанный ряд обладает этим свойством. Вероятно, читатели уже заметили, что числа эти — ряд степеней ¹⁾ числа 3:

$$3^0, 3^1, 3^2, 3^3.$$

Это значит, что мы обращаемся здесь к услугам троичной системы счисления. Гири — цифры этой троичной системы. Но как воспользоваться ею, когда требуемый вес

¹⁾ Единицу можно рассматривать как нулевую степень 3 (вообще как нулевую степень любого числа).

Вес	Правая чашка	Левая чашка	Вес	Правая чашка	Левая чашка
1	1	0	21	$27 + 3$	9
2	3	1	22	$27 + 3 + 1$	9
3	3	0	23	27	$3 + 1$
4	$3 + 1$	0	24	27	3
5	9	$3 + 1$	25	$27 + 1$	3
6	9	3	26	27	1
7	$9 + 1$	3	27	27	0
8	9	1	28	$27 + 1$	0
9	9	0	29	$27 + 3$	1
10	$9 + 1$	0	30	$27 + 3$	0
11	$9 + 3$	1	31	$27 + 3 + 1$	0
12	$9 + 3$	0	32	$27 + 9$	$3 + 1$
13	$9 + 3 + 1$	0	33	$27 + 9$	3
14	27	$9 + 3 + 1$	34	$27 + 9 + 1$	3
15	27	$9 + 3$	35	$27 + 9$	1
16	$27 + 1$	$9 + 3$	36	$27 + 9$	0
17	27	$9 + 1$	37	$27 + 9 + 1$	0
18	27	9	38	$27 + 9 + 3$	1
19	$27 + 1$	9	39	$27 + 9 + 3$	0
20	$27 + 3$	$9 + 1$	40	$27 + 9 + 3 + 1$	0

получается в виде р а з н о с т и двух гирь? И как избежать необходимости обращаться к удвоению гирь (в троичной системе ведь, кроме нуля, употребляются две цифры: 1 и 2)?

То и другое достигается введением «отрицательных» цифр. Дело сводится попросту к тому, что вместо цифры 2 употребляют $3-1$, т. е. единицу высшего разряда, от которой от н и м а е т с я одна единица низшего. Например, число 2 в нашей видоизмененной троичной системе обозначается не 2, а 11, где знак минус над цифрой единиц означает, что единица эта не прибавляется, а отнимается. Точно так же число 5 изобразится не 12, а 111 (т. е. $9-3-1=5$).

Теперь ясно, что если любое число можно изобразить в троичной системе с помощью нуля (т. е. знака отсутствия числа) и одной только цифры, именно прибавляемой или отнимаемой единицы, то из чисел 1, 3, 9, 27 можно, складывая или вычитая их, составить все числа от 1 до 40. Мы как бы пишем все эти числа, употребляя гири вместо цифр. Случай сложения отвечает при взвешивании случаю, когда гири помещаются все на одну чашку, а случай вычитания, —

когда часть гирь кладется на чашку с товаром и, следовательно, вес их отнимается от веса остальных гирь. Нуль соответствует отсутствию гири.

Как известно, система эта на практике не употребляется. Всюду в мире, где введена метрическая система мер, применяется набор в 1, 2, 2, 5 единиц, а не 1, 3, 9, 27, хотя первым можно отвешивать грузы только до 10 единиц, а вторым — до 40. Не применялся набор 1, 3, 9, 27 и тогда, когда метрическая система еще не была введена. В чем же причина отказа на практике от этого, казалось бы, совершеннейшего разновеса?

Причина кроется в том, что идеальный разновес удобен лишь на бумаге, на деле же пользоваться им весьма хлопотливо. Если бы приходилось только отвешивать заданное число весовых единиц — например, отвесить 400 г масла или 2500 г сахара, — то системой гирь в 100, 300, 900, 2700 можно было бы на практике пользоваться (хотя и тут приходилось бы каждый раз долго подыскивать соответствующую комбинацию). Но когда приходится определять, сколько весит данный товар, то подобный разновес оказывается крайне неудобным: здесь нередко ради прибавления к поставленным гилям одной единицы пришлось бы производить полную замену прежней комбинации другой, новой. Отвешивание становится при таких условиях делом крайне медленным и притом утомительным. Не всякий быстро сообразит, что, например, вес 19 кг получится, если на одну чашку поставить гири в 27 кг и 1 кг, а на другую 9 кг; вес 20 кг — если на одну чашку поставить гири в 27 кг и 3 кг, а на другую — 9 кг и 1 кг. При каждом отвешивании приходилось бы решать подобные головоломки. Разновес 1, 2, 2, 5 таких затруднений не доставляет.

ПРЕДСКАЗАТЬ СУММУ НЕНАПИСАННЫХ ЧИСЕЛ

Одним из наиболее поражающих «номеров», выполняемых феноменальным советским вычислителем Р. С. Арраго, является молниеносное — с одного взгляда — складывание целого столбца многозначных чисел.

Но что сказать о человеке, который может написать сумму еще раньше, чем ему названы все слагаемые?

Это, конечно, фокус, и выполняется он в таком виде. Отгадчик предлагает вам написать какое-нибудь многознач-

ное число, по вашему выбору. Бросив взгляд на это первое слагаемое, отгадчик пишет на бумажке сумму всей будущей колонны слагаемых и передает вам на хранение. После этого он просит вас (или кого-нибудь из присутствующих) написать еще одно слагаемое, опять какое угодно. А сам затем быстро пишет третье слагаемое. Вы складываете все три написанных числа — и получается как раз тот результат, который заранее был написан отгадчиком на спрятанной у вас бумажке.

Если, например, вы написали в первый раз 83 267, то отгадчик пишет будущую сумму 183 266. Затем вы пишете, допустим, 27 935, а отгадчик приписывает третье слагаемое — 72 064:

I. . .	Вы: 83 267
III. . .	Вы: 27 935
IV. . .	Отгадчик: 72 064
II. . .	Сумма 183 266

Получается в точности предсказанная сумма, хотя отгадчик не мог знать, каково будет второе слагаемое. Отгадчик может предсказать также сумму 5 или 7 слагаемых, но тогда он сам пишет два или три из них. Никакой подмены бумажки с результатом здесь заподозрить вы не можете, так как она до последнего момента хранится в вашем собственном кармане. Очевидно, отгадчик пользуется каким-то неизвестным вам свойством чисел. Каким?

Отгадчик пользуется тем, что от прибавления, скажем, к пятизначному числу числа из 5 девяток (99 999) это число увеличивается на 100 000—1, т. е. впереди него появляется единица, а последняя цифра уменьшается на единицу. Например:

$$\begin{array}{r}
 + \quad 83\,267 \\
 \quad 99\,999 \\
 \hline
 183\,266
 \end{array}$$

Эту сумму, т. е. сумму написанного вами числа и 99 999, отгадчик и пишет на бумажке как будущий результат сложения. А чтобы результат оправдался, он, увидев ваше второе слагаемое, выбирает свое третье слагаемое так, чтобы вместе со вторым оно составило 99 999, т. е. вычитает каждую цифру второго слагаемого из 9. Эти операции вы легко можете теперь проследить на предыдущем примере,

а также и на следующих:

I. . .	Вы:	379 264
III. . .	Вы:	4 873
IV. . .	Отгадчик:	995 126
II. . .	Сумма:	1379 263
I. . .	Вы:	9 035
III. . .	Вы:	5 669
IV. . .	Отгадчик:	4 330
II. . .	Сумма:	19 034

Легко усмотреть, что вы сильно затрудните отгадчика, если второе ваше слагаемое будет заключать больше цифр, чем первое: отгадчик не сможет написать слагаемое, которое уменьшит второе число для оправдания предсказанного слишком малого результата. Поэтому опытный отгадчик предусмотрительно ограничивает свободу выбора этим условием.

Фокус выходит внушительнее, когда в придумывании слагаемых участвует несколько лиц. После первого же слагаемого, например 437 692, отгадчик уже предсказывает сумму всех пяти чисел, именно записывает 2 437 690 (здесь будет добавлено дважды 999 999, т. е. 200 000—2). Дальнейшее ясно из схемы:

I. . .	Вы написали:	437 692
III. . .	Другой написал:	822 541
V. . .	Третий написал:	263 009
IV. . .	Отгадчик добавил:	177 458
VI. . .	»	» 736 990
II	Отгадчик предсказал:	2 437 690

Еще пример:

I. . .	Вы написали:	7 400
III. . .	Другой написал:	4 732
V. . .	Третий написал:	9 000
IV. . .	Отгадчик добавил:	5 267
VI. . .	»	» 999
II	Отгадчик предсказал:	27 398

Читателям небезынтересно будет теперь познакомиться с тем, как описан тот же фокус советским писателем Шишковым в его романе «Странники».

«Иван Петрович вырвал из блокнота страничку, подал мальчонке, спросил:

— Карандаш есть? Пиши любое число.

Мальчонка написал. Иван Петрович мельком взглянул на это число, написал на отдельном клочке бумаги свое какое-то число, сунул бумажку в солому и прикрыл шляпой.

— Пиши под ним другое. Написал? Теперь я сам напишу третье. Теперь все три числа складывай. Только тщательно, не ври.

Через две минуты был готов проверенный ответ. Инженер Вошкин (прозвище мальчика) подал свои выкладки:

$$\begin{array}{r} 46\ 853 \\ +\ 21\ 398 \\ 78\ 601 \\ \hline 146\ 852 \end{array}$$

— Сто сорок шесть тысяч восемьсот пятьдесят два, Иван Петрович.

— Долго считаешь. А у меня — вот он ответ. Я уже знал его, когда ты еще первое число написал. Вот. Тяни из-под шляпы.

Мальчонка выхватил бумажку. Там значилось: 146 852».

В романе фокус оставляется неразъясненным. Но вам, конечно, вполне понятна его несложная арифметическая основа.

МНИМАЯ НЕОЖИДАННОСТЬ

В 1916 г., в разгар империалистической войны, некоторые газеты нейтральной Швейцарии занимались арифметическим «гаданием» о... грядущей судьбе императоров Германии и Австрии. «Пророки» складывали следующие столбцы чисел:

Для Вильгельма II:

год рождения	1859
год вступления на престол . . .	1888
число лет царствования	28
возраст	57

С у м м а . . . 3832

Для Франца-Иосифа:

год рождения	1830
год вступления на престол . . .	1848
число лет царствования	68
возраст	86

С у м м а . . . 3832

В совпадении сумм «пророки» видели мрачное предзнаменование для коронованных особ, и так как каждый итог представлял собой удвоенный 1916-й год, то обоим императорам предрекали гибель именно в этом году.

Между тем совпадение результатов с математической стороны не является неожиданным. Стоит немного изменить порядок слагаемых — и станет понятно, почему они дают в итоге удвоенный 1916-й год. В самом деле, разместим слагаемые так:

год рождения,
возраст,
год вступления на престол,
число лет царствования.

Что должно получиться, если к году рождения прибавить возраст? Разумеется, дата того года, когда производится вычисление. Точно так же, если к году вступления на престол прибавить число лет царствования, получится опять год, когда производится расчет. Ясно, что итог сложения четырех наших слагаемых не может быть не чем иным, как удвоенным годом выполнения расчета. Очевидно — судьба императоров абсолютно не зависит от подобной арифметики...

Так как о сказанном выше не все догадываются, то можно воспользоваться этим для забавного арифметического фокуса. Предложите кому-нибудь написать тайно от вас четыре числа:

год рождения,
год поступления в школу (на завод и т. п.),
возраст,
число лет обучения в школе (работы на заводе и т. п.).

Вы беретесь отгадать сумму этих чисел, хотя ни одно из них вам неизвестно. Для этого вы удваиваете год выполнения фокуса и объявляете итог. Если, например, фокус показывается в 1960 г., то сумма — 3820.

Чтобы иметь возможность, не обнаруживая секрета, с успехом проделывать этот фокус несколько раз, вы заставляете слушателя производить над суммой какие-нибудь арифметические действия, маскируя этим свой прием.

МГНОВЕННОЕ ДЕЛЕНИЕ

Из многочисленных разновидностей фокусов этого рода опишем один, основанный на знакомом уже нам свойстве множителя, состоящего из ряда одних девяток; когда

умножают на него число со столькими же цифрами, получается результат, состоящий из двух половин: первая — это умножаемое число, уменьшенное на единицу; вторая — результат вычитания первой половины из множителя. Например: $247 \times 999 = 246\,753$; $1372 \times 9999 = 13\,718\,628$ и т. п. Причину легко усмотреть из следующей строки:

$$247 \times 999 = 247 \times (1000 - 1) = 247\,000 - 247 = \\ = 246\,999 - 246.$$

Пользуясь этим, вы предлагаете группе товарищей произвести деление многозначных чисел — одному $68\,933\,106 : 6894$, другому $8\,765\,112\,348 : 9999$, третьему $543\,456 : 544$, четвертому $12\,948\,705 : 1295$ и т. д., а сами беретесь обогнать их всех, выполняя те же задачи. И, прежде чем они успеют приняться за дело, вы уже вручаете каждому бумажку с полученным вами безошибочным результатом деления: первому — 9999, второму 87 652, третьему — 999, четвертому — 9999.

Вы можете сами придумать по указанному образцу ряд других способов поражать непосвященных мгновенным выполнением деления: для этого воспользуйтесь некоторыми свойствами тех чисел, которые помещены в «Галерею числовых дикувинок» (см. главу V).

ЛЮБИМАЯ ЦИФРА

Попросите кого-нибудь сообщить вам его любимую цифру. Допустим, вам назвали цифру 6.

— Вот удивительно! — восклицаете вы. — Да ведь это как раз самая замечательная из всех значащих цифр.

— Чем же она замечательна? — осведомляется заинтересованный собеседник.

— Вот посмотрите: умножьте вашу любимую цифру на число значащих цифр, т. е. на 9, и полученное число (54) подпишите множителем под числом 12 345 679:

$$\begin{array}{r} \times 12\,345\,679 \\ 54 \\ \hline \end{array}$$

Что получится в произведении?

Ваш собеседник выполняет умножение — и с изумлением получает результат, состоящий сплошь из его любимых цифр:

666 666 666.

— Видите, какой у вас тонкий арифметический вкус, — заканчиваете вы. — Вы сумели избрать из всех цифр как раз ту, которая обладает столь замечательным свойством!

Однако в чем тут дело?

Точно такой же изысканный вкус оказался бы у вашего собеседника, если бы он избрал какую угодно другую из девяти значащих цифр, потому что каждая из них обладает тем же свойством:

$$\begin{array}{r} 12\,345\,679 \\ \times 4 \times 9 \\ \hline 444\,444\,444 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12\,345\,679 \\ \times 7 \times 9 \\ \hline 777\,777\,777 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12\,345\,679 \\ \times 9 \times 9 \\ \hline 999\,999\,999 \end{array}$$

Почему это так, вы сообразите, если припомните то, что говорилось о числе 12 345 679 в «Галерее числовых дикихинок».

УГАДАТЬ ДАТУ РОЖДЕНИЯ

Фокусы, относящиеся к этой категории, могут быть изменяемы на разные лады. Опишу один из видов этого фокуса, довольно сложный, но именно потому и производящий сильное впечатление.

Допустим, что вы родились 18 мая и что вам теперь 23 полных года. Я, конечно, не знаю ни даты вашего рождения, ни вашего возраста. Тем не менее я берусь отгадать то и другое, заставив вас проделать лишь некоторый ряд вычислений.

А именно: порядковый номер месяца (май, 5-й месяц) я прошу вас умножить на 100, прибавить к произведению число месяца (18), сумму удвоить, к результату прибавить 8, полученное число умножить на 5, к произведению прибавить 4, помножить результат на 10, прибавить 4 и к полученному числу прибавить ваш возраст (23).

Когда вы все это проделаете, вы сообщаете мне окончательный результат вычислений. Я вычитаю из него 444, а разность разбиваю на грани, справа налево, по 2 цифры в каждой: получаю сразу как число и месяц вашего рождения, так и ваш возраст.

Действительно, проделаем последовательно все указанные вычисления:

$$\begin{array}{rcl}
 5 \times 100 & = & 500 \\
 500 + 18 & = & 518 \\
 518 \times 2 & = & 1\,036 \\
 1036 + 8 & = & 1\,044 \\
 1044 \times 5 & = & 5\,220 \\
 5220 + 4 & = & 5\,224 \\
 5224 \times 10 & = & 52\,240 \\
 52240 + 4 & = & 52\,244 \\
 52244 + 23 & = & 52\,267
 \end{array}$$

Произведя вычитание $52\,267 - 444$, получаем число 51 823.

Теперь разобьем это число на грани, справа налево, по две цифры в каждой. Имеем:

$$5-18-23,$$

т. е. 5-го месяца (мая), числа 18; возраст 23 года.

Почему же так получилось?

Секрет наш легко понять из рассмотрения следующего равенства:

$$\begin{aligned}
 \{[(100\,m + t) \times 2 + 8] \times 5 + 4\} \times 10 + 4 + n - 444 &= \\
 = 10\,000\,m + 100t + n.
 \end{aligned}$$

Здесь буква m обозначает порядковый номер месяца, t — число месяца, n — возраст. Левая часть равенства выражает все последовательно произведенные вами действия, а правая — то, что должно получиться, если раскрыть скобки и проделать возможные упрощения. В выражении $10\,000\,m + 100t + n$ ни m , ни t , ни n не могут быть более чем двузначными числами; поэтому число, получающееся в результате, всегда должно при делении на грани, по две цифры в каждой, расчлениваться на три части, выраженные искомыми числами m , t и n .

Предоставляем изобретательности читателя придумать видоизменения фокуса, т. е. другие комбинации действий, дающие подобный же результат.

ОДНО ИЗ «УТЕШНЫХ ДЕЙСТВИЙ» МАГНИЦКОГО

Предлагаю читателю раскрыть также секрет следующего бессмысленного фокуса, который описан еще в «Арифметике» Магницкого в главе «Об утешных неких действиях, через арифметику употребляемых».

Пусть кто-либо задумает какое-нибудь число, относящееся к деньгам, к дням, к часам или к какой-либо иной числимой вещи. Остановимся на примере перстня, надетого на 2-й сустав мизинца (т. е. 5-го пальца) 4-го из 8 человек. Когда в это общество является отгадчик, его спрашивают: у кого из восьми человек (обозначенных номерами от 1 до 8), на каком пальце и на котором суставе находится перстень?

«Он же рече: кто-либо из вас умножи одного, который взял через 2, и к тому приложи 5, потом паки (снова) умножи через 5, также приложи перст на нем же есть перстень (т. е. к полученному прибавь номер пальца с перстнем). А потом умножи через 10, и приложи сустав на нем же перстень взложен, и от сих произведенное число скажи им, по нему же исконое получиши».

Они же твориша (поступили) якоже повеле им, умножаху четвертого человека, который взял перстень, и прочая вся, яже велеша им; якоже явлено есть (см. выкладки); из всего собрания пришло ему число 702, из него же он вычитал 250, осталось 452, т. е. 4-й человек, 5-й палец, 2-й сустав».

Не надо удивляться, что этот арифметический фокус был известен еще 200 лет назад: задачу совершенно подоб-

$$\begin{array}{r}
 4 \text{ лиц} \\
 2 \text{ множи:} \\
 \hline
 8 \\
 5 \text{ прилож:} \\
 \hline
 13 \\
 5 \text{ множи:} \\
 \hline
 65 \\
 5 \text{ прилож и перст:} \\
 \hline
 70 \\
 10 \text{ множи:} \\
 \hline
 700 \\
 \text{составь 2 прилож.} \\
 \hline
 702 \\
 250 \\
 \hline
 452
 \end{array}$$

Рис. 50. Математический фокус из «Арифметики» Магницкого.

ного же рода я нашел в одном из первых сборников математических развлечений, именно у Баше-де-Мезирияка в его книге «Занимательные и приятные числовые задачи», вышедшей в 1612 г.; а туда она попала из сочинения Леонардо Пизанского (Фибоначчи) (1202 г.). Нужно вообще заметить, что большая часть математических игр, головоломок и развлечений, которые в ходу в настоящее время, очень древнего происхождения.

ОТГАДЫВАНИЕ ЧИСЕЛ

В заключение, ничего у вас не спрашивая, я отгадаю результат, который вы получите в итоге выкладок над задуманным вами числом.

Задумайте любую цифру, кроме нуля. Умножьте ее на 37. Полученное умножьте на 3. Последнюю цифру произведения зачеркните, а оставшееся число разделите на первоначально задуманную цифру; остатка не будет.

Я могу сказать вам, какое число вы получили, хотя все это я написал задолго до того, как вы приступили к чтению книги.

У вас получилось число 11.

Второй раз сделаем фокус на иной лад. Задумайте двузначное число. Припишите к нему справа то же число еще раз. Полученное четырехзначное число разделите на то, которое вы первоначально задумали: деление выполнится нацело. Все цифры частного сложите.

У вас получилось 2.

Если не так, то проверьте внимательно свои вычисления и убедитесь, что ошиблись вы, а не я.

В чем разгадка этих фокусов?

Разгадка. Наш читатель теперь достаточно уже опытен в разгадывании фокусов и не потребует от меня долгих объяснений. В первом опыте отгадывания задуманное число умножалось сначала на 37, потом на 3. Но $37 \times 3 = 111$, а умножить цифру на 111 — значит составить число из трех таких же одинаковых цифр (например, $4 \times 37 \times 3 = 444$). Что мы сделали далее? Мы зачеркнули последнюю цифру и, следовательно, получили число из двух одинаковых цифр (44), которое, конечно, должно делиться на задуманную цифру и дать в частном 11.

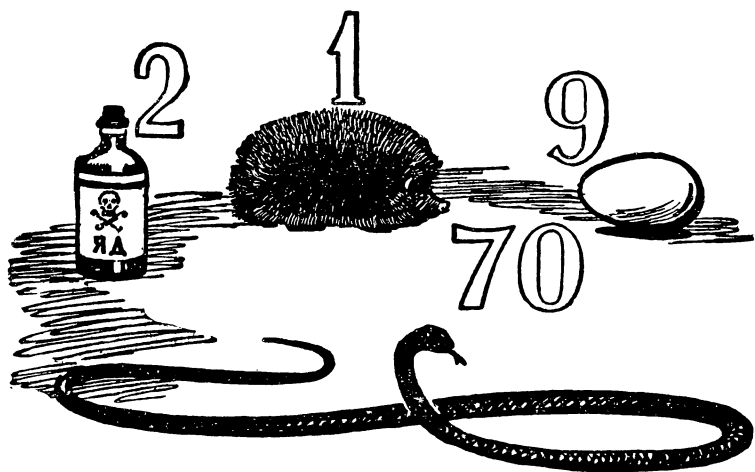
Во втором опыте задуманное двузначное число мы писали дважды кряду: например, задумав 29, писали 2929.

Это все равно, что умножить задуманное число на 101 (в самом деле, $29 \times 101 = 2929$). Раз я это знаю, я могу с уверенностью предвидеть, что от деления такого четырехзначного числа на задуманное число получится 101 и что, следовательно, сумма цифр частного ($1+0+1$) равна 2.

Как видите, отгадывание основано на свойствах чисел 111 и 101; мы вправе поместить оба эти числа в нашу арифметическую кунсткамеру.

Арифметические курьезы

$$100 = \begin{cases} 24 \frac{3}{6} + 75 \frac{9}{18} \\ 47 \frac{3}{6} + 52 \frac{9}{18} \end{cases}$$



ГЛАВА СЕДЬМАЯ БЫСТРЫЙ СЧЕТ

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И МНИМЫЕ ФЕНОМЕНЫ

Кому приходилось присутствовать на сеансах нашего советского вычислителя Арраго, тот, без сомнения, не мог не поразиться его изумительными счетными способностями. Тут перед нами уже не фокусы, а редкое природное дарование. Куб числа 4729, например, Арраго вычислил при мне в уме менее чем в одну минуту (результат: 105 756 712 489), а на умножение $679\,321 \times 887\,064$, так же в уме, употребил всего $1\frac{1}{2}$ минуты.

Я имел возможность наблюдать вычислительную работу этого феноменального счетчика не только на эстраде, но и в домашней обстановке, с глазу на глаз, и мог убедиться, что никакими особыми вычислительными приемами он не пользуется, а считает в уме в общем так же, как мы на бумаге. Но необычайная его память на числа помогает ему обходиться без записи промежуточных результатов, а быстрая сообразительность позволяет оперировать с дву-

значными числами так же легко, как мы производим действия над числами однозначными. Благодаря этому умножение шестизначного числа на шестизначное является для него задачей не большей трудности, чем для нас — умножение трехзначного на трехзначное.

Такие феномены, как у нас Арраго или на Западе — Иноди, Диаманди, Рюкле, д-р Фред Браунс, встречаются единицами. Но наряду с ними подвизаются и эстрадные математики иного рода, основывающие свое искусство на тех или иных арифметических трюках. Вам, быть может, приходилось слышать или даже присутствовать на «сеансах гениальных математиков», вычислявших в уме с поразительной быстротой, сколько вам минуло дней, минут, секунд, в какой день недели вы родились и т. п. Чтобы выполнить большую часть этих вычислений, не нужно однако обладать необычайными математическими способностями. Надо лишь знать кое-какие секреты этих фокусов, разоблачением которых мы сейчас и займемся.

ЗАПОМИНАНИЕ ЧИСЕЛ

Быстрый вычислитель должен прежде всего обладать превосходно развитой памятью на числа. До какой изощренности доходит такая память у лучших счетчиков, показывают следующие рекорды. Знаменитый немецкий вычислитель Рюкле выучил наизусть число, состоявшее из 504 цифр, в течение 35 минут, а его соотечественник д-р Браунс побил этот рекорд, сделав то же самое менее чем в 13 минут!

Но, конечно, такой феноменальной памятью наделены от природы лишь отдельные единицы. Профессиональные счетчики, подвизающиеся на эстраде, не обладая прирожденной памятью на числа, помогают себе различными искусственными приемами (так называемыми «мнемоническими»). В обиходной жизни мы и сами зачастую пытаемся пользоваться подобными приемами, большей частью, надо признаться, довольно неудачно выбранными. Желая, например, запомнить номер телефона 25-49, мы возлагаем надежды на то, что число это легко удастся восстановить в памяти, так как оно составлено из двух точных квадратов: $25=5^2$, $49=7^2$. Но когда является надобность действительно вспомнить его, к нашим услугам оказывается безнадёжно обширный выбор номеров:

12-25, 36-64, 25-16, 64-16, 81-25 и т. д.

Подобная же неудача постигает нас и в других случаях. Телефон № 17-53 мы собираемся запомнить, пользуясь тем, что сумма первых двух цифр ($1+7$) равна сумме двух последних ($5+3$). Но финал оказывается не лучше, чем в предыдущем случае. А ведь надо еще не спутать, к чьему телефону была применена та и к какому иная комбинация. Можно только удивляться, как упорно люди пытаются пользоваться этим явно негодным приемом. Пристрастие к нему остроумно высмеял писатель Я. Гашек в своих знаменитых «Похождениях бравого солдата Швейка»:

«Швейк разглядывал номер своей винтовки и, наконец, сказал:

— Номер 4268. Как раз такой номер был у одного паровоза в Печке на шестнадцатом пути. Паровоз надо было увести в Лиссу для ремонта, но это не так-то просто было, потому что у машиниста, который должен был его отвести туда, была очень плохая память на номера. Тогда начальник дистанции вызвал его к себе в канцелярию и говорит ему: „На 16-м пути стоит паровоз № 4268. Я знаю, у вас плохая память на номера, а если вам написать номер на бумажке, то вы бумажку потеряете. Но уж если вы так слабы на номера, то постарайтесь запомнить, что я вам сейчас скажу, и вы увидите, что можно с легкостью заметить себе любой номер. Ну, так вот. Паровоз, который вам надо отвести в депо, значится за номером 4268. Вот и обратите внимание. Первая цифра — четверка, вторая — двойка. Запомните, стало быть, 42, т. е. дважды два — четыре, что дает нам первую цифру, а если разделить ее на два, то получится опять два, и таким образом у нас получается рядом 4 и 2. Дальше уже просто. Сколько будет дважды четыре? Восемь, не так ли? Вот вы и запечатлейте в памяти, что восьмерка в нашем номере является последней цифрой. Теперь вы уже запомнили, что первая цифра — четверка, вторая — двойка, а последняя — восьмерка. Значит, остается только запомнить цифру шесть перед восьмеркой. Но и это совсем просто. Ведь первая цифра у нас 4, вторая 2, а вместе они как раз составляют 6. Вот и номер 4268 крепко засел у вас в голове. Вы можете также прийти к результату более простым путем, а именно: из 8 вычесть 2, получится 6. Запомните: 6. Из 6 вычесть два, получится 4. Стало быть, имеем уже 4 и 68. Теперь надо только между этими двумя цифрами поставить цифру 2, и получим 4268. Можно сделать и еще иначе, тоже весьма просто, при помощи умножения.

Запомните, что дважды 42 равно 84. В году двенадцать месяцев. Надо вычесть 12 из 84, останется 72, и из 72 еще раз вычесть 12 месяцев. Получится 60. Вот у нас уже есть 6, потому что нуль мы можем просто отбросить. Значит, если мы напишем 42—6—84 и отбросим последнюю 4, то неминуемо получим число 4268, т. е. номер паровоза, который надо отвести“».

Приемы эстрадных счетчиков совершенно иного рода. Вот один из них, который может при случае пригодиться и каждому из нас. Счетчик связывает с цифрами определенные согласные буквы, твердо выученные:

<i>цифры</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>буквы</i>	Н	Г	Д	К	Ч	П	Ш	С	В	Р
	М	Ж	Т	Х	Щ	Б	Л	З	Ф	Ц

Так как буквы выбраны только согласные, то их можно, не боясь путаницы, сочетать с гласными, составляя короткие словечки. Например:

<i>для чисел</i>	<i>слова</i>	<i>для чисел</i>	<i>слова</i>
1	еж	6	шея
2	яд	7	усы
3	око	8	ива
4	щи	9	яйцо
5	обои		

Сходным образом составляются слова и для двузначных чисел:

11 — гага	14 — гуша
12 — год	15 — губа
13 — жук	15 — игла и т. п.

Чтобы запомнить число 2549, эстрадный счетчик мысленно подписывает под цифрами соответствующие им буквы:

2	5	4	9
д	п	ч	р
т	б	щ	ц

и быстро составляет из них слова:

25	49
дуб	ящер

«Дуб» и «ящер» не только легко запомнить, но и связать как-нибудь с фамилией гражданина или названием учреждения, которым принадлежит телефон.

Таков один из мнемонических приемов, употребительных среди эстрадных счетчиков¹⁾. Существуют и другие, на которых мы, однако, останавливаться не будем, а перейдем к способам выполнения счетных номеров программы.

— Мне столько-то лет. Сколько мне дней? — спрашивает кто-нибудь из публики и немедленно же получает с эстрады ответ.

— А сколько мне секунд, если возраст мой такой-то? — ставит вопрос другой и также получает быстрый ответ.

Как же выполняются подобные подсчеты?

«СКОЛЬКО МНЕ ДНЕЙ?»

Чтобы по числу лет быстро определить число дней, счетчик прибегает к такому приему: половину числа лет множит на 73 и приписывает нуль — результат и будет искомым числом. Эта формула станет понятна, если заметить, что $730 = 365 \times 2$. Если мне 24 года, то число дней получим, умножив $12 \times 73 = 876$ и приписав нуль — 8760. Самое умножение на 73 также производится сокращенным образом, о чем речь впереди.

Поправка в несколько дней, происходящая от високосных лет, обыкновенно в расчет не принимается, хотя ее легко ввести, прибавив к результату четверть числа лет, в нашем примере $24 : 4 = 6$; общий результат, следовательно, 8766²⁾.

Прием для вычисления числа м и н у т читатель после сказанного в следующей статье не затруднится найти самостоятельно.

¹⁾ Подробнее об этом см. в моей книжке «Фокусы и развлечения».

²⁾ Указанными далее приемами ускоренного умножения эти операции облегчаются до чрезвычайности, и миллионный результат получается очень быстро. Советую читателю попробовать произвести то же вычисление и обыкновенным путем, чтобы на деле убедиться, какая экономия во времени получается при пользовании указанной формулой и приведенными далее приемами.

«СКОЛЬКО МНЕ СЕКУНД?»

Если возраст спрашивающего выражается четным числом, не большим 26, то на этот вопрос также можно довольно быстро ответить, пользуясь следующим приемом: половину числа лет умножают на 63; затем ту же половину множат на 72, результат ставят рядом с первым и приписывают три нуля. Если, например, число лет 24, то для определения числа секунд поступают так:

$$63 \times 12 = 756; 72 \times 12 = 864; \text{результат } 756\,864\,000.$$

Как и в предыдущем примере, здесь не приняты в расчет високосные годы — ошибка, которой никто не поставит вычислителю в упрек, когда приходится иметь дело с сотнями миллионов (к тому же ее можно исправить, прибавив число секунд, заключающихся в количестве дней, равном четвертой части числа лет).

На чем же основан указанный здесь прием?

Правильность нашей формулы выясняется очень просто. Чтобы определить число секунд, заключающихся в данном числе лет, нужно лета (в нашем примере 24) умножить на число секунд в году, т. е. на $365 \times 24 \times 60 \times 60 = 31\,536\,000$. Мы делаем то же самое, но только большой множитель 31 536 разбиваем на две части (приписка нулей сама собой понятна). Вместо того чтобы умножать 24 на 31 536, умножают 24 на 31 500 и на 36; но и эти действия мы для удобства вычислений заменяем другими, как видно из следующей схемы:

$$24 \times 31\,536 = \left\{ \begin{array}{l} 24 \times 31\,500 = 12 \times 63\,000 = 756\,000 \\ 24 \times 36 = 12 \times 72 = 864 \end{array} \right. \quad \underline{\hspace{1cm} 756\,864 \hspace{1cm}}$$

Остается лишь приписать три нуля, и мы имеем искомый результат: 756 864 000.

ПРИЕМЫ УСКОРЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

Мы упоминали раньше, что для выполнения тех отдельных действий умножения, на которые распадается каждый из указанных выше приемов, существуют также удобные способы. Некоторые из них весьма несложны и удобоприемимы; они настолько облегчают вычисления, что не мешают

вообще запомнить их, чтобы пользоваться при обычных расчетах. Таков, например, прием перекрестного умножения, весьма удобный при действии с двузначными числами. Способ не нов; он восходит к грекам и индийцам и в старину назывался «способом молнии» или «умножением крестиком». Теперь он забыт, и о нем не мешает напомнить.

Пусть требуется перемножить 24×32 . Мысленно располагаем числа по следующей схеме, одно под другим:

$$\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ | & \times | \\ 3 & 2 \end{array}$$

Теперь последовательно производим следующие действия:

1) $4 \times 2 = 8$ — это последняя цифра результата.

2) $2 \times 2 = 4$; $4 \times 3 = 12$; $4 + 12 = 16$; 6 — предпоследняя цифра результата; 1 запоминаем.

3) $2 \times 3 = 6$, да еще удержанная в уме единица, имеем 7 — это первая цифра результата.

Получаем, следовательно, произведение: 768.

После непродолжительного упражнения прием этот усваивается очень легко.

Другой способ, состоящий в употреблении так называемых «дополнений», удобно применяется в тех случаях, когда перемножаемые числа близки к 100.

Предположим, что требуется перемножить 92×96 . «Дополнение» для 92 до 100 будет 8, для 96 будет 4. Действие производят по следующей схеме:

множители: 92 и 96,
«дополнения»: 8 и 4.

Первые две цифры результата получаются простым вычитанием из множителя «дополнения» множимого или наоборот, т. е. из 92 вычитают 4 или из 96 вычитают 8. В том и другом случае имеем 88; к этому числу приписывают произведение «дополнений»: $8 \times 4 = 32$. Получаем результат 8832.

Что полученный результат должен быть верен, наглядно видно из следующих преобразований:

$$92 \times 96 = \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 88 \times 96 = 88 (100 - 4) = 88 \times 100 - 88 \times 4 \\ 4 \times 96 = 4 (88 + 8) = 4 \times 88 + 88 \times 4 \end{array} \right. \\ \hline 92 \times 96 \qquad \qquad \qquad = \qquad \qquad \qquad 8832 + 0 \end{array}$$

Еще пример:

Требуется умножить 78 на 77.

Множители: 78 и 77,
«дополнения»: 22 и 23

$$78 - 23 = 55$$

$$22 \times 23 = 506$$

$$5500 + 506 = 6006$$

Третий пример:

Перемножить 99×98 .

Множители: 99 и 98,
«дополнения»: 1 и 2

$$99 - 2 = 97$$

$$1 \times 2 = 2$$

В данном случае надо помнить, что 97 означает здесь число сотен. Поэтому складываем

$$9700 + 2 = 9702.$$

ДЛЯ ОБИХОДНЫХ РАСЧЕТОВ

Существует огромное множество приемов ускоренного выполнения арифметических действий, приемов, предназначенных не для эстрадных выступлений, а для обиходных вычислений. Составилась бы целая книга, если задаться целью описать хотя бы только главнейшие из них ¹⁾. Ограничусь лишь несколькими примерами из числа наиболее удобоприменимых.

В практике технических и торговых вычислений нередки случаи, когда приходится складывать столбцы чисел, близких друг к другу по величине. Например:

43	}	Сложение таких чисел значительно упрощается, если воспользоваться указанным на стр. 134 приемом, сущность которого легко понять.
38		
39		
45		
41		
39		
42		

¹⁾ См., например, книжку Г. Н. Бермана «Приемы счета», изд. 6-е, Физматгиз, 1959.

$$\left. \begin{array}{l} 43 = 40 + 3 \\ 38 = 40 - 2 \\ 39 = 40 - 1 \\ 45 = 40 + 5 \\ 41 = 40 + 1 \\ 39 = 40 - 1 \\ 42 = 40 + 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 40 \times 7 = 280 \\ 3 - 2 - 1 + 5 + 1 - 1 + 2 = 7 \\ 280 + 7 = 287 \end{array}$$

Точно так же находим сумму

$$\left. \begin{array}{l} 752 = 750 + 2 \\ 753 = 750 + 3 \\ 746 = 750 - 4 \\ 754 = 750 + 4 \\ 745 = 750 - 5 \\ 751 = 750 + 1 \end{array} \right\} 750 \times 6 + 1 = 4501$$

Сходным образом поступают, когда находят арифметическое среднее чисел, близких между собою по величине. Найдем, например, среднюю из следующих цен:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Р. Коп.} \\ 4 \text{ } 65 \\ 4 \text{ } 73 \\ 4 \text{ } 75 \\ 4 \text{ } 67 \\ 4 \text{ } 78 \\ 4 \text{ } 74 \\ 4 \text{ } 68 \\ 4 \text{ } 72 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Намечаем на глаз круглую цену, близкую} \\ \text{к средней,— в данном случае, очевидно,} \\ \text{4 р. 70 к. Записываем отклонения всех цен} \\ \text{от средней: избытки со знаком } +, \text{ недо-} \\ \text{статки со знаком } -. \text{ Получаем:} \\ \quad -5 + 3 + 5 - 3 + 8 + 4 - 2 + 2 = 12. \\ \text{Деля сумму отклонений на число их,} \\ \text{имеем } 12:8 = 1,5. \end{array}$$

Отсюда искомая средняя цена:

$$4 \text{ р. 70 к. } + 1,5 \text{ к.} = 4 \text{ р. } 71 \frac{1}{2} \text{ к.}$$

Перейдем к у м н о ж е н и ю. Здесь прежде всего укажем, что умножение на числа 5, 25 и 125 значительно ускоряется, если иметь в виду следующее:

$$5 = \frac{10}{2}; \quad 25 = \frac{100}{4}; \quad 125 = \frac{1000}{8}.$$

Поэтому, например,

$$\begin{aligned} 36 \times 5 &= \frac{360}{2} = 180; & 87 \times 5 &= \frac{870}{2} = 435; \\ 36 \times 25 &= \frac{3600}{4} = 900; & 87 \times 25 &= \frac{8700}{4} = 2175; \\ 36 \times 125 &= \frac{36000}{8} = 4500; & 87 \times 125 &= \frac{87000}{8} = 10875. \end{aligned}$$

При умножении на 15 можно пользоваться тем, что

$$15 = 10 \times 1 \frac{1}{2}.$$

Поэтому легко производить в уме вычисления вроде таких:

$$36 \times 15 = 360 \times 1 \frac{1}{2} = 360 + 180 = 540$$

или, проще,

$$\begin{aligned} 36 \times 1 \frac{1}{2} \times 10 &= 540, \\ 87 \times 15 &= 870 + 435 = 1305. \end{aligned}$$

При умножении на 11 нет надобности писать 5 строк:

$$\begin{array}{r} + 383 \\ + 11 \\ \hline + 383 \\ + 383 \\ \hline 4213 \end{array}$$

достаточно лишь под умножаемым числом подписать его еще раз, отодвинувши на одну цифру:

$$\begin{array}{r} + 383 \\ + 383 \\ \hline 4213 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{r} + 383 \\ + 383 \\ \hline 4213 \end{array}$$

и произвести сложение.

Полезно запомнить результаты умножения первых 9 чисел на 12, 13, 14 и 15. Тогда умножение многозначных чисел на такие множители значительно ускоряется. Пусть требуется умножить

$$\begin{array}{r} \times 4587 \\ 13 \\ \hline \end{array}$$

Поступаем так. Каждую цифру множимого умножаем в уме сразу на 13:

$$7 \times 13 = 91; \text{ 1 — пишем, 9 — запоминаем;}$$

$$8 \times 13 = 104; 104 + 9 = 113; \text{ 3 — пишем, 11 — запоминаем;}$$

$$5 \times 13 = 65; 65 + 11 = 76; \text{ 6 — пишем, 7 — запоминаем;}$$

$$4 \times 13 = 52; 52 + 7 = 59.$$

Итого — 59 631.

После нескольких упражнений прием этот легко усваивается.

Весьма удобный прием существует для умножения двузначных чисел на 11: надо раздвинуть цифры множимого и вписать между ними их сумму:

$$43 \times 11 = 473.$$

Если же сумма цифр двузначная, то число ее десятков прибавляют к первой цифре множимого:

$$48 \times 11 = 4(12)8, \text{ т. е. } 528.$$

Укажем, наконец, кое-какие приемы ускоренного деления. При делении на 5 умножают делимое и делитель на 2:

$$3471:5 = 6942:10 = 694,2.$$

При делении на 25 умножают оба числа на 4:

$$3471:25 = 13884:100 = 138,84.$$

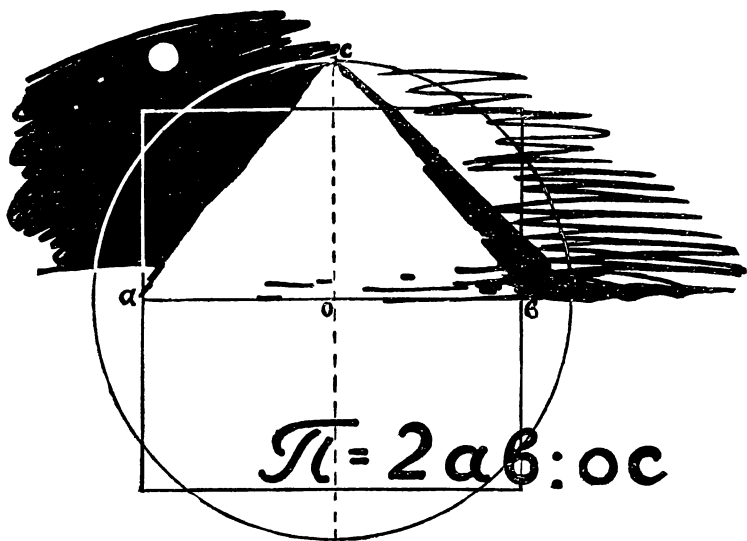
Сходным образом поступают при делении на $1\frac{1}{2}$ ($=1,5$) и на $2\frac{1}{2}$ ($=2,5$):

$$3471:1\frac{1}{2} = 6942:3 = 2314,$$

$$3471:2,5 = 13884:10 = 1388,4.$$

Арифметические курьезы

$$100 = \begin{cases} 74\frac{3}{6} + 25\frac{9}{18} \\ 95\frac{3}{7} + 4\frac{16}{28} \end{cases}$$



ГЛАВА ВОСЬМАЯ ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАГАДКИ ПИРАМИДЫ ХЕОПСА

Высочайшая пирамида древнего Египта — Хеопсова, уже пять тысячелетий обвеваемая знойным воздухом пустыни, представляет, без сомнения, самую удивительную постройку, сохранившуюся от древнего мира (рис. 51). Высота почти в полтораста метров, она покрывает своим основанием площадь в 40 тысяч квадратных метров и сложена из двухсот рядов исполинских камней. Сто тысяч рабов в течение 30 лет трудились над возведением этого сооружения, — сначала подготавливая 10 лет дорогу для перевозки камней от каменоломни до места постройки, а затем громоздя их 20 лет друг на друга с помощью несовершенных машин того времени.

Было бы странно, если бы такое огромное сооружение воздвигнуто было с единственной целью — служить гробницей для правителя страны. Поэтому некоторые исследова-

тели стали доискиваться: не раскроется ли тайна пирамиды из соотношения ее размеров?

Им посчастливилось, по их мнению, найти ряд удивительных соотношений, свидетельствующих о том, что жрецы, руководители работ по постройке, обладали глубокими познаниями по математике и астрономии и эти познания воплотили в каменных формах пирамиды.

«Геродот ¹⁾ рассказывает, — читаем мы в книге французского астронома Море („Загадки науки“, 1926 г., т. I), —



Рис. 51. Какие математические тайны скрывают в себе египетские пирамиды?

что египетские жрецы открыли ему следующее соотношение между стороной основания пирамиды и ее высотой: квадрат, построенный на высоте пирамиды, в точности равен площади каждого из боковых треугольников. Это вполне подтверждается новейшими измерениями. Вот доказательство, что во все времена пирамида Хеопса рассматривалась как памятник, пропорции которого рассчитаны математически.

Приведу более позднее доказательство: мы знаем, что отношение между длиной окружности и ее диаметром есть постоянная величина, хорошо известная современным

¹⁾ Знаменитый греческий историк посетил Египет за 300 лет до нашей эры.

школьникам. Чтобы вычислить длину окружности, достаточно умножить ее диаметр на 3,1416.

Математики древности знали это отношение лишь грубо приближенно.

Но вот, если сложить четыре стороны основания пирамиды, мы получим для ее обвода 931,22 метра. Разделив же это число на удвоенную высоту ($2 \times 148,208$), имеем в результате 3,1416, т. е. отношение длины окружности к диаметру. (Другие авторы из тех же измерений пирамиды выводят значение π с еще большею точностью: 3,14159.— Я. П.)

Этот единственный в своем роде памятник представляет собою, следовательно, материальное воплощение числа „пи“, игравшего столь важную роль в истории математики. Египетские жрецы имели, как видим, точные представления по ряду вопросов, которые считаются открытиями ученых позднейших веков¹⁾.

Еще удивительнее другое соотношение: если сторону основания пирамиды разделить на точную длину года — 365,2422 суток, то получается как раз 10-миллионная доля земной полуоси, с точностью, которой могли бы позавидовать современные астрономы...

Далее: высота пирамиды составляет ровно миллиардную долю расстояния от Земли до Солнца — величины, которая европейской науке стала известна лишь в конце XVIII века. Египтяне 5000 лет назад знали, оказывается, то, чего не знали еще ни современники Галилея и Кеплера, ни ученые эпохи Ньютона. Неудивительно, что изыскания этого рода породили на Западе обширную литературу.

А между тем все это — не более как игра цифрами. Дело представится совсем в другом свете, если подойти к нему с оценкой результатов приближенных вычислений.

Рассмотрим же по порядку те примеры, которые мы привели.

1) О числе «пи». Арифметика приближенных чисел утверждает, что если в результате действия деления желаем получить число с шестью верными цифрами (3,14159), мы должны иметь в делимом и делителе по крайней мере столько же верных цифр. Это значит — в применении к пира-

¹⁾ Значение «пи» с той точностью, которая получена здесь из соотношения размеров пирамиды, стало известно европейским математикам только в XVI веке.

миде, — что для получения шестизначного «пи» надо было измерить стороны основания и высоту пирамиды с точностью до миллионных долей результата, т. е. до одного миллиметра. Астроном Море приводит для высоты пирамиды 148,208 м, на первый взгляд как будто действительно с точностью до 1 мм.

Но кто поручится за такую точность измерения пирамиды? Вспомним, что в лабораториях Института мер (ВИМС), где производятся точнейшие в мире измерения, не могут при измерении длины превзойти такой точности (получают при измерении длины лишь 6 верных цифр). Понятно, насколько грубее может быть выполнено измерение каменной громады в пустыне. Правда, при точнейших землемерных работах (при измерении так называемых «базисов») можно и на местности достичь такой же точности, как и в лаборатории, т. е. ручаться за 6 цифр в числе. Но невозможно осуществить это в условиях измерения пирамиды. Истинных, первоначальных размеров пирамиды давно нет в натуре, так как облицовка сооружения выветрилась, и никто не знает, какой она была толщины. Чтобы быть добросовестным, надо брать размеры пирамиды в целых метрах; а тогда получается довольно грубое «пи», не более точное, чем то, которое известно из математического папируса Ринда.

Если пирамида действительно есть каменное воплощение числа «пи», то воплощение это, как видим, далеко не совершенное. Но вполне допустимо, что пирамида не сооружена вовсе ради выражения именно этого соотношения. В пределы приближенных трехзначных чисел для размеров пирамиды хорошо укладываются и другие допущения. Возможно, например, что для высоты пирамиды было взято $\frac{2}{3}$ ребра пирамиды или $\frac{2}{3}$ диагонали ее основания. Вполне допустимо и то соотношение, которое было указано Геродотом: что высота пирамиды есть квадратный корень из площади боковой грани. Все это — догадки, столь же вероятные, как и «гипотеза пи».

2) Следующее утверждение касается продолжительности года и длины земного радиуса: если разделить сторону основания пирамиды на точную длину года (число из 7 цифр), то получим в точности 10-миллионную долю земной оси (число из 5 цифр). Но раз мы уже знаем, что в делимом у нас не больше трех верных цифр, то ясно, какую цену имеют здесь эти 7 и 5 знаков в делителе и в частном.

Арифметика может ручаться в этом случае только за 3 цифры в длине года и земного радиуса. Год в 365 суток и земной радиус около 6400 километров — вот числа, о которых мы вправе здесь говорить.

3) Что же касается расстояния от Земли до Солнца, то здесь недоразумение иного рода. Странно даже, как приверженцы этой теории могут не замечать допускаемой ими здесь логической ошибки. Ведь если, как они утверждают, сторона пирамиды составляет известную долю земного радиуса, а высота — известную долю основания, то нельзя уже говорить, будто та же высота составляет определенную долю расстояния до Солнца. Что-нибудь одно — либо то, либо другое. А если случайно тут обнаруживается любопытное соответствие обеих длин, то оно всегда существовало в нашей планетной системе, и никакой заслуги жрецов в этом быть не может.

Сторонники рассматриваемой теории идут еще далее: они утверждают, что масса пирамиды составляет ровно одну тысячетриллионную долю массы земного шара. Это соотношение, по их мнению, не может быть случайным и свидетельствует о том, что древнеегипетские жрецы знали не только геометрические размеры нашей планеты, но и задолго до Ньютона и Кавендиша исчислили ее массу, «взвесили» земной шар.

Здесь та же самая нелогичность, что и в примере с расстоянием от Земли до Солнца. Совершенно нелепо говорить о том, будто масса пирамиды «выбрана» в определенном соответствии с массой земного шара. Масса пирамиды определилась с того момента, как выбран был ее материал и назначены были размеры ее основания и высоты. Нельзя одновременно сообразовать высоту пирамиды с основанием, составляющим определенную долю земного радиуса, и не а в и с и м о т э т о г о ставить ее массу в связь с массой Земли. Одно определяется другим. Значит, должны быть отвергнуты всякие домыслы о знании египтянами массы земного шара. Это не более как числовая эквилибристика. Искусно оперируя с числами, опираясь на случайные совпадения, можно доказать, пожалуй, все, что угодно.

Мы видим, на каких шатких основаниях покоится легенда о непостижимой учености жрецов-архитекторов пирамиды. Попутно мы имеем тут и наглядную демонстрацию пользы того отдела арифметики, который занимается п р и б л и ж е н н ы м и числами.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЧИСЛА

Кто незнаком с правилами действий над приближенными числами, тому, вероятно, интересно будет хотя бы вкратце с ними ознакомиться, тем более, что знание этих простых приемов оказывается и практически полезным, сберегая труд и время при вычислениях.

Объясним прежде всего, что такое «приближенное число» и откуда такие числа получаются.

Данные, входящие в технические расчеты, получаются путем измерения. Но никакое измерение не может быть выполнено совершенно точно. Прежде всего, уже самые меры, которыми пользуются для измерения, обычно заключают в себе погрешность. Изготовить совершенно точные метровые линейки, килограммовую гирию, литровую кружку — чрезвычайно трудно, и закон допускает при их изготовлении некоторую погрешность. Например, при изготовлении метровой линейки допускается законом погрешность до 1 миллиметра; для 10-метровой землемерной цепи или ленты — до 1 сантиметра; для килограммовой гири — до 1 грамма¹⁾; для разновески в 1 грамм — до 0,01 грамма; для литровой кружки — до 5 куб. см.

Кроме того, выполнение измерения также вводит неточности. Пусть вы измеряете какое-нибудь расстояние, например ширину улицы. Мера, метр, отложилась в ее ширине, допустим, 13 раз, и еще остался кусочек меньше метра. Вы можете сказать, что ширина улицы 13 метров; на самом деле, однако, она равна 13 целым метрам и еще некоторому числу десятых, сотых и т. д. долей метра, которых вы не учли. Следовательно, результат нашего измерения можно изобразить так:

$$\text{ширина улицы} = 13,??? \text{ метра,}$$

где вопросительные знаки означают неизвестные нам цифры десятых, сотых и т. д. долей.

Если бы вы пожелали измерить ширину улицы точнее, вы узнали бы, сколько в остающемся кусочке содержится дециметров (десятых долей метра). Допустим, что дециметров содержится 8 и еще имеется некоторый остаток, меньший дециметра. Результат нового измерения, 13,8 м,

¹⁾ Помимо погрешности в гирих, закон допускает погрешность и в устройстве весов, входящую, например, в столовых весах до 1 грамма на каждый килограмм отвешиваемого груза.

будет точнее предыдущего, но и он не строго точен, потому что, кроме 8 десятых метра, в ширине улицы заключается еще некоторое неизвестное нам число сотых, тысячных и т. д. долей метра. Следовательно, полученный сейчас более точный результат мы можем выразить так:

13,8?? метра.

При еще более тщательном измерении вы учтете сотые доли метра (сантиметры) в откинутом остатке, но пренебрежете остатком, меньшим сантиметра; значит, этот результат не будет безусловно точен. Вообще, как бы аккуратно вы ни мерили, вы никогда не можете быть твердо уверены, что далее последней полученной вами цифры не находятся еще другие, вам неизвестные.

Дело, конечно, нисколько не меняется от того, что при измерениях остатки, большие половины единицы меры, обычно считаются за целые. Если бы при первом измерении улицы мы считали ее ширину не 13 метров, а 14, это также был бы лишь приближенный результат. Его можно было бы выразить так:

14,??? метров,

где вопросительные знаки означают отрицательные цифры (т. е. показывают, на сколько десятых, сотых и т. д. долей число 14 больше истинной ширины улицы).

Итак, результат даже самого тщательного измерения не может быть рассматриваем как совершенно точный: он выражает истинную величину лишь более или менее приближенно. Такие числа называются приближенными.

Арифметика приближенных чисел не во всем сходна с арифметикой чисел точных. Покажем это различие на примере.

Пусть требуется вычислить площадь прямоугольного участка, длина которого 68 м, а ширина 42 м. Если бы числа 68 и 42 были точные, площадь участка в точности равнялась бы

$$68 \times 42 = 2856 \text{ кв. м.}$$

Но числа 68 и 42 не точные, а приближенные: в длине не ровно 68 м, а немного больше или меньше, так как невероятно, чтобы метр укладывался в ней в точности 68 раз. Да и самая длина метровой линейки едва ли в точности была равна 1 м. Мы можем согласно предыдущему выразить

длину участка в метрах так:

$$68,?$$

Подобным же образом и ширину участка выразим через

$$42,?$$

Проведем теперь умножение приближенных чисел:

$$68,? \times 42,?$$

Выполнение действия видно из следующей схемы:

$$\begin{array}{r} \times 68,? \\ 42,? \\ \hline ? ? ? \\ 136 ? \\ 272 ? \\ \hline 285?, ?? \end{array}$$

Мы видим, что четвертая цифра результата нам неизвестна: она должна получиться от сложения трех цифр $(?+6+?)$, из которых две неизвестны. Недостоверна также и третья цифра результата: мы записали 5, но ведь от сложения столбца $?+6+?$ могло получиться число больше 10 и даже 20; значит, вместо 5 может оказаться и 6 и 7. Вполне надежны только первые две цифры результата (28). Поэтому, желая быть добросовестными, мы должны утверждать лишь, что искомая площадь включает о к о л о 28 сотен кв. метров. Каковы цифры десятков и единиц в числе кв. метров, нам неизвестно.

Итак, правильный ответ на вопрос задачи — 2800, причем нули здесь означают не заведомое отсутствие единиц соответствующих разрядов, а лишь отсутствие достоверных знаний о них. Иначе говоря, нули означают здесь то же, что и вопросительные знаки в предыдущих обозначениях.

Ошибочно думать, что ответ 2856, полученный по правилам арифметики точных чисел, вернее ответа 2800. Ничуть: ведь мы видели, что последние две цифры результата (56) доверия не заслуживают: поручиться за них нельзя. Ответ 2800 предпочтительнее, чем 2856, потому что он не вводит в заблуждение; он прямо утверждает, что достоверны лишь цифры 2 и 8 на месте тысяч и сотен, а какие цифры идут дальше, неизвестно. Ответ же 2856 обманчив: он внушает неверную мысль, будто последние две цифры столь же надежны, как и первые две.

«Нечестно писать больше цифр, чем столько, за сколько мы можем ручаться... Мне очень грустно признаться, что немало таких чисел, ведущих к превратным представлениям, встречается в лучших сочинениях о паровых машинах... Когда я учился в школе, нам сообщали, что среднее расстояние от Земли до Солнца 95 142 357 англ. миль ¹⁾. Я удивляюсь, почему не было упомянуто, сколько еще футов и дюймов. Наиболее точные современные измерения позволяют лишь утверждать, что это расстояние не больше 93 и не меньше 92,5 миллиона миль», — писал по этому поводу английский математик Перри.

Итак, при выкладках с приближенными числами надо принимать во внимание не все цифры результата, а только некоторые. О том, какие именно цифры следует в этих случаях удерживать и какие заменять нулями, мы будем говорить особо. Остановимся сначала на том, как надо округлять числа.

ОКРУГЛЕНИЕ ЧИСЕЛ

Округление числа при выкладках состоит в том, что одну или несколько цифр на его конце заменяют нулями. Так как нули, стоящие после запятой, не имеют значения, то их отбрасывают вовсе. Например:

<i>числа</i>	<i>округляют в</i>
3734....	3730 или 3700
5,314....	5,31 или 5,3
0,00731....	0,0073 или 0,007

Если первая из отбрасываемых при округлении цифр есть 6 или больше, то предыдущую увеличивают на единицу. Например:

<i>числа</i>	<i>округляют в</i>
4867....	4870 или 4900
5989....	5990 или 6000
3,666....	3,67 или 3,7

Так же поступают, если отбрасывается цифра 5 с последующими за нею значащими цифрами. Например:

<i>числа</i>	<i>округляют в</i>
4552....	4600
38,1506....	38,2

¹⁾ Английская миля равна 1852 м.

Но если отбрасывается т о л ь к о цифра 5, то увеличивать на единицу предшествующую цифру условились лишь тогда, когда она н е ч е т н а я; четную же цифру оставлять без изменения. Например:

<i>числа</i>	<i>округляют в</i>
735.....	740
8645.....	8640
37,65.....	37,6
0,0275.....	0,028
70,5.....	70 ¹⁾

При обработке результатов действий над приближенными числами руководствуются теми же правилами округления.

ЦИФРЫ ЗНАЧАЩИЕ И НЕЗНАЧАЩИЕ

Под з н а ч а щ и м и цифрами в учении о приближенных вычислениях разумеют все цифры, кроме нуля, а также и нуль в том случае, если он стоит между другими значащими цифрами. Так, в числах 3700 и 0,0062 все нули — незначащие цифры; в числах же 105 и 2006 нули значащие. В числе 0,0708 первые два нуля — незначащие, третий же нуль — значащая цифра.

В некоторых случаях значащий нуль может находиться и в конце числа; округляя, например, число 2,540002, мы получаем число 2,54000, в котором все нули на конце — значащие, так как указывают на заведомое отсутствие единиц в соответствующих разрядах. Поэтому, если в условии задачи или в таблице мы встречаем числа 4,0 или 0,80, то должны рассматривать их, как двузначные. Округляя число 289,9 в 290, мы также получаем на конце значащий нуль.

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЧИСЕЛ

Результат сложения или вычитания приближенных чисел не должен оканчиваться значащими цифрами в тех разрядах, которые отсутствуют хотя бы в одном из данных чисел.

¹⁾ Нуль рассматривают как ч е т н у ю цифру.

Если такие цифры получились, их следует отбросить посредством округления:

$$\begin{array}{r}
 + 3400 \\
 \underline{+ 275} \\
 3700 \\
 \text{(а не 3675)}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 + 28,3 \\
 + 146,85 \\
 \underline{108} \\
 283 \\
 \text{(а не 283,15)}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 - 176,3 \\
 \underline{- 0,46} \\
 175,8 \\
 \text{(а не 175,84)}
 \end{array}$$

Нетрудно понять основание этого правила. Пусть требуется к 3400 *м* прибавить 275 *м*. В числе 3400 мерщик, очевидно, пренебрег десятками метров; ясно, что, прибавив к этому числу 7 десятков метров и еще 5 *м*, мы получим в сумме не 3675 *м*, а скорее всего результат с иными цифрами на месте десятков и единиц. Поэтому на месте десятков и единиц мы пишем в сумме нули, которые в данном случае указывают, что вычислителю неизвестно, какие именно цифры должны здесь стоять.

УМНОЖЕНИЕ, ДЕЛЕНИЕ И ВОЗВЫШЕНИЕ В СТЕПЕНЬ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЧИСЕЛ

Результат умножения, а также деления приближенных чисел не должен заключать больше значащих цифр, чем имеется их в более коротком данном. (Из двух чисел то «короче», которое содержит меньше значащих цифр.) Лишние цифры заменяют нулями.

Примеры:

$$\begin{array}{r}
 \times 37 \\
 \underline{245} \\
 9100 \\
 \text{(а не 9065)}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 57,8:3,2=18 \text{ (а не 18,06);} \\
 25:3,14=8,0 \text{ (а не 7,961).}
 \end{array}$$

При подсчете числа цифр не обращают на запятую внимания; так, 4,57 есть число трехзначное и т. п.

Число значащих цифр степени приближенного числа не должно превышать числа их в основании степени. Излишние цифры заменяются нулями.

Примеры:

$$\begin{array}{l}
 157^2=24\,600 \text{ (а не 24\,649);} \\
 5,81^3=196 \text{ (а не 196,122941).}
 \end{array}$$

ПРИМЕНЕНИЕ НА ПРАКТИКЕ

Правила эти относятся лишь к результатам окончательным. Если же выполняемым действием расчет еще не заканчивается, то в результате такого промежуточного действия удерживают одной значащей цифрой больше, чем требуют правила. Выполняя, например, вычисление

$$\frac{36 \times 1,4}{3,4},$$

поступают так:

$$36 \times 1,4 = 50,4 \text{ (удерживают не две, а три цифры);}$$
$$50,4 : 3,4 = 15.$$

При несложных технических расчетах указанные выше правила могут быть почти во всех случаях применяемы следующим упрощенным образом. Прежде чем вычислять, устанавливают по числу цифр самого короткого из данных, сколько достоверных цифр может заключать окончательный результат. Когда это установлено, приступают к выкладкам, причем во всех промежуточных выкладках удерживают одной цифрой больше, чем установлено для окончательного результата. Если, например, в условии задачи дано несколько трехзначных чисел и одно двузначное, то окончательный результат будет иметь две достоверные цифры, а промежуточные результаты надо брать с тремя цифрами.

Итак, все правила приближенных вычислений могут быть при выполнении расчетов сведены к двум следующим:

1) устанавливают, сколько значащих цифр в самом коротком из данных задачи: столько же значащих цифр нужно будет удержать в окончательном результате;

2) в результатах всех промежуточных вычислений удерживают одной цифрой больше, чем установлено для окончательного результата ¹⁾.

Прочие цифры во всех случаях заменять нулями или отбрасывать по правилам округления.

Правила эти не применимы к тем задачам (встречающимся редко), для решения которых нужно производить только действия сложения и вычитания. В таких случаях придерживаются другого правила.

¹⁾ Подробнее о приближенных вычислениях см. мою брошюру «Таблицы и правила для вычислений» (ОГИЗ, 1931).

Окончательный результат не должен иметь значащих цифр в тех разрядах, которые отсутствуют хотя бы в одном из приближенных данных. В промежуточных результатах надо удерживать одной значащей цифрой больше, чем установлено для окончательного. От прочих цифр освобождаются округлением.

Если, например, данные задачи таковы:

$$37,5 \text{ м}, \quad 185,64 \text{ м}, \quad 0,6725 \text{ м},$$

и для решения требуется вычесть первое число из суммы других, то в сумме

$$\begin{array}{r} + 185,64 \\ 0,6725 \\ \hline 186,3125 \end{array}$$

как в промежуточном результате, откидывают последнюю цифру (т. е. берут 186,312), а в разности

$$\begin{array}{r} 186,312 \\ - 37,5 \\ \hline 148,812 \end{array}$$

как в результате окончательном, удерживают лишь 148,8.

СБЕРЕЖЕНИЕ СЧЕТНОГО ТРУДА

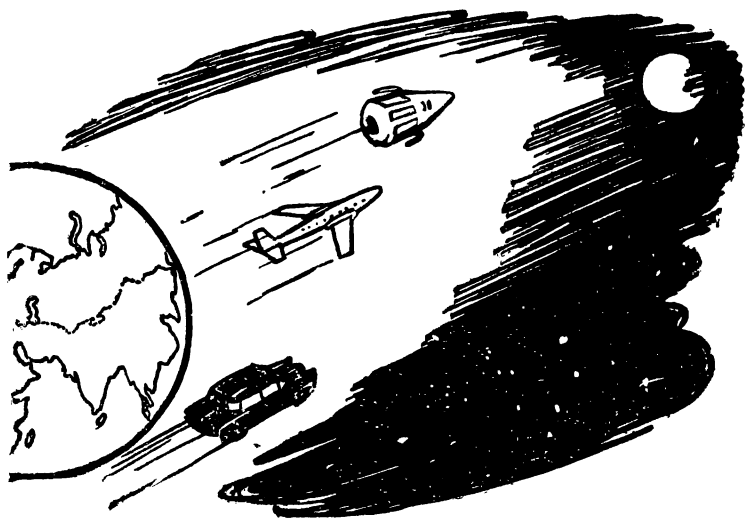
Как оценить, сколько вычислительной работы сэкономим мы, пользуясь изложенными сейчас приемами? Для этого надо какой-нибудь сложный расчет выполнить двояко: один раз — по обычным арифметическим правилам, другой — приближенно. А затем терпеливо подсчитать, сколько раз при том и другом подсчете приходилось нам складывать, вычитать и умножать отдельные цифры. Окажется, что приближенный расчет потребует таких элементарных операций в $2\frac{1}{2}$ раза меньше, чем «точный». Ущерба же для правильности результата в приближенном расчете нет никакого.

Итак, приближенные вычисления требуют примерно в $2\frac{1}{2}$ раза меньше времени, нежели вычисления по обычным правилам. Но это еще не все сбережение времени, какое при этом достигается. Ведь каждая лишняя счетная операция, каждый лишний случай сложения, вычитания или умножения цифр является лишним поводом сделать ошибку.

Вероятность ошибиться при приближенных выкладках в $2\frac{1}{2}$ раза меньше, чем при «точных». А стоит хоть раз ошибиться — и вычисление придется переделать заново, если не все целиком, то часть его. Значит, сбережение труда и времени при приближенных расчетах получается во всяком случае больше чем в $2\frac{1}{2}$ раза. Время, затраченное на ознакомление с ними, вознаграждается очень быстро и щедро.

Арифметические курьезы

$$100 = \begin{cases} 98 \frac{3}{6} + 1 \frac{27}{54} \\ 94 \frac{1}{2} + 5 \frac{38}{76} \end{cases}$$



ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ЧИСЛОВЫЕ ВЕЛИКАНЫ

ЧИСЛОВЫЕ ВЕЛИКАНЫ НАШЕЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОСТИ

Величественна внушительность числовых великанов — миллиона, миллиарда, триллиона. Эти числа, недоступные прежде нашему воображению, все настойчивее проникают в нашу повседневную жизнь, в нашу социалистическую действительность.

Взгляните, например, на сообщение Центрального статистического управления при Совете министров СССР о производстве основных видов промышленной продукции в 1958 г., и вы почти в каждой строке встретите одного из числовых великанов. В этом сообщении мы читаем о том, что в 1958 г. произведено:

около 40 миллионов тонн чугуна,
55 миллионов тонн стали,
43 миллиона тонн проката,
113 миллионов тонн нефти,

	33	миллиона тонн цемента,
	356	миллионов пар кожаной обуви,
	303	миллиона метров шерстяных тканей,
	25	миллионов часов всех видов,
	1,5	миллиона фотоаппаратов,
	1	миллион телевизоров,
около	3,5	миллиона тонн мяса,
	1	миллион тонн колбасных изделий,
около	3	миллионов тонн рыбы,
около	5,5	миллиона тонн сахара,
	68	миллионов кв. метров жилой площади.

Мы находим в этом сообщении и другой числовой великан — миллиард, который в 1000 раз больше миллиона. Так, например, в том же 1958 г.

добыто около	30	миллиардов кубических метров газа,
	0,5	миллиарда тонн каменного угля,
выработано	233	миллиарда киловатт-часов электроэнергии,
около	6	миллиардов метров хлопчатобумажных тканей,
более	0,8	миллиарда метров шелковых тканей,
	28	миллиардов штук кирпича,
более	4	миллиардов банок консервов,
собрано	8,5	миллиарда пудов зерна,
	23,5	миллиарда штук яиц,
издано	1,1	миллиарда экземпляров книг,
объем капитальных вложений составил		
	235	миллиардов рублей.

Но и миллиард не предел. Нашлось место в этом сообщении также и числовому великану триллиону, который равен 1 000 миллиардов или 1 миллиону миллионов. Так, в 1958 г. грузооборот всех видов транспорта составил

около	1,6	триллиона тонно-километров,
из них	1,3	триллиона приходится на железнодорожный транспорт.

Все это произведено за один только 1958 г.! А впереди еще гораздо более грандиозная и величественная программа развернутого строительства коммунизма в нашей стране, начертанная историческим XXI съездом Коммунистической партии Советского Союза на семилетие с 1959 по 1965 г.

Об этом семилетнем плане бурного экономического развития нашей страны мы поговорим подробно немного ниже.

Для тех, кто не отдает себе достаточно ясного отчета в колоссальности миллиона, миллиарда и триллиона, остаются не вполне осознанными те огромные достижения, которых мы добились уже в 1958 г.

Когда вы читаете приведенные выше числа, какие образы появляются в вашем уме? Чтобы ощутить грандиозность подобных чисел, стоит затратить немного времени на «арифметическую гимнастику», развивающую способность правильно оценивать подлинные размеры больших чисел.

КАК ВЕЛИК МИЛЛИОН?

Начнем с миллиона. Слово «миллион» обозначает тысячу тысяч. В XIII веке известный путешественник Марко Поло посетил Китай и, чтобы выразить несметные богатства этой чудесной страны, придумал слово «миллион».

Если хотите ощутить истинные размеры миллиона, попробуйте хотя бы проставить в чистой тетради миллион точек. Я не предлагаю вам доводить такую работу до конца (едва ли у кого на это достанет терпения), уже одно начало работы, ее медленный ход даст вам почувствовать, что такое «настоящий» миллион.

Английский натуралист А. Р. Уоллес, сподвижник знаменитого Дарвина, придавал весьма серьезное значение развитию правильного представления о миллионе. Он предлагал ¹⁾ «в каждой большой школе отвести одну комнату или залу, на стенах которой можно было бы наглядно показать, что такое миллион. Для этой цели нужно 10 больших квадратных листов бумаги, в 4½ фута каждый, разграфить квадратами в четверть дюйма, оставив равное число белых промежутков между черными пятнами. Через каждые 10 пятен нужно оставлять двойной промежуток, чтобы отделить каждую сотню пятен (10×10). Таким образом, на каждом листе будет по 10 тысяч черных пятен, хорошо различимых с середины комнаты, а все сто листов будут содержать миллион пятен. Такая зала была бы в высшей степени поучительна... Никто не может оценить достижений современной науки, имеющей дело с невообразимо большими или невообразимо малыми величинами, если неспособен их представить наглядно и, суммируя в целое,

¹⁾ В книге «Положение человека во вселенной».

вообразить себе, как велико число *о д и н* миллион, когда современной астрономии и физике приходится иметь дело с сотнями, тысячами и даже миллионами таких миллионов¹⁾). Во всяком случае, очень желательно, чтобы в каждом большом городе была устроена такая зала для наглядного показа на ее стенах величины одного миллиона».

Не знаю, было ли желание натуралиста исполнено на его родине, но мне довелось самому осуществить его предложение в Ленинграде, в Центральном парке культуры и отдыха. Здесь в отдельном павильоне занимательной науки был нанесен на потолке миллион темных кружков. Необозримое поле черных точек производило на посетителей сильное впечатление и действительно давало возможность ощутить огромность миллиона. Впечатление усиливалось сопоставлением этого множества с другим множеством, которое издавна принято считать неисчислимым, — с числом звезд, видимых на небе простым глазом. Вопреки распространенному убеждению, невооруженный глаз видит на одном полушарии ночного неба всего лишь $3\frac{1}{2}$ тысячи звезд. Число это в 300 раз меньше миллиона. Небольшой голубой кружок на потолке упомянутого павильона, содержащий 3500 темных точек и изображавший ночное небо, наглядно подчеркивал своими скромными размерами огромность подлинного числового великана — миллиона.

Читатель, вероятно, пожелает узнать, каким же способом был нанесен на потолок миллион темных кружков. Сколько времени должны были маляры выполнять эту однообразную работу? Павильон не скоро был бы готов, если бы постановка вручную миллиона точек на его потолке была поручена малярам. Дело было сделано гораздо проще: заказаны были обои с надлежаще расположенными крапинами, и ими оклеили потолок.

МИЛЛИОН НА ШЕСТЕРЕНКАХ

Совершенно иначе представлена невообразимая величина миллиона в Доме занимательной науки в Ленинграде. Здесь это достигается с помощью небольшого прибора, изображение которого вы видите на рис. 52. Ряд зубчатых колес

¹⁾ Например, взаимные расстояния планет измеряются десятками и сотнями миллионов километров, расстояния до звезд — миллионами миллионов километров, а число молекул в кубическом сантиметре окружающего нас воздуха — миллионами миллионов миллионов.

подобран и сцеплен в этом приборе так, что, когда рукоятку поворачивают 10 раз, стрелка первого циферблата делает один оборот. Когда рукоятка повернется 100 раз, стрелка этого циферблата обойдет круг 10 раз и одновременно стрелка соседнего, второго циферблата сделает один оборот. Чтобы заставить один раз обернуться стрелку следующего, третьего циферблата, надо сделать рукояткой прибора 1000 оборотов. После 10 000 оборотов рукоятки обернется один раз стрелка четвертого циферблата; после 100 000 — обернется

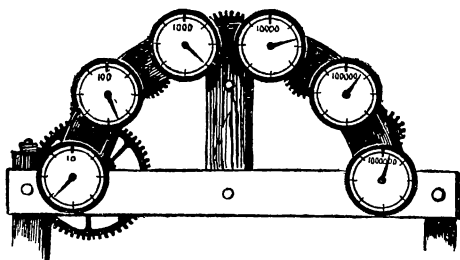


Рис. 52. Одиннадцать суток нужно вертеть ручку прибора, чтобы стрелки показали 1 000 000 оборотов.

пятая стрелка, и, наконец, после 1 000 000 оборотов рукоятки обернется однажды последняя, шестая стрелка.

Если миллион кружков на потолке поражает зрение, то этот прибор действует на мышечное чувство. Вертя рукоятку и наблюдая за тем, как медленно движутся стрелки на последних циферблатах, мы непосредственно своими руками как бы ощущаем вес тех шести нулей, которые сопровождают единицу в изображении миллиона. Ведь чтобы добраться до шестого нуля, нужно вертеть ручку прибора без отдыха и остановок сплошь в течение одиннадцати суток (считая по одному обороту в секунду)!

МИЛЛИОН СЕКУНД

Здесь я предлагаю доступный для каждого способ развить в себе более отчетливое представление о величине миллиона. Для этого нужно только дать себе труд поупражняться в мысленном миллионном счете мелких, но хорошо знакомых нам единиц — шагов, минут, спичек, стаканов и т. п. Результаты получаются нередко неожиданные и поразительные.

Приведем несколько примеров.

Сколько времени отняла бы у вас работа — пересчитать миллион каких-либо предметов, по одному в каждую секунду?

Оказывается, что, считая безостановочно по 10 часов в сутки, вы закончили бы подсчет в месяц времени. Приблизительно удостовериться в этом нетрудно устным вычислением: в часе 3600 секунд, в 10 часах — 36 000; в трое суток вы, следовательно, пересчитаете всего около 100 тысяч предметов; а так как миллион в десять раз больше, то, чтобы досчитать до него, понадобится 30 дней ¹⁾.

Отсюда следует, между прочим, что предложенная ранее работа — поставить в тетради миллион точек — потребовала бы много недель самого усердного и неустанного труда.

До какой степени люди склонны недооценивать величину миллиона, показывает поучительное заблуждение самого Уоллеса: предостерегая других от преуменьшения миллиона, он заканчивает приведенный выше (стр. 153) отрывок таким советом:

«В маленьких размерах каждый может устроить это сам для себя: стоит только достать сотню листов толстой бумаги, разлиновать их на квадратики и поставить крупные черные точки. Подобное изображение было бы очень поучительно, хотя не в такой, конечно, степени, как осуществленное в большом масштабе». Почтенный автор, по-видимому, полагал, что работа эта вполне под силу одному человеку.

ПОЛОСА ИЗ МИЛЛИОНА ВОЛОС

Тонкость волоса вошла чуть ли не в поговорку. Все часто видят волос и хорошо знают, насколько он тонок. Толщина человеческого волоса — около 0,07 мм. Мы округлим ее до 0,1 мм. Представьте себе, что рядом, бок о бок, положен миллион волос. Какой ширины получилась бы полоса. Можно ли было бы, например, протянуть ее поперек двери?

Если вы никогда не задумывались над такой задачей, то можно поручиться, что, не проделав вычисления, вы дадите грубо-ошибочный ответ. Вы будете, пожалуй, даже оспаривать правильный ответ: настолько покажется он неправдоподобным. Каков же он?

¹⁾ Отметим для сведения, что в году (астрономическом) 31 558 150 секунд; миллион секунд в точности равен 11 суткам 13 час. 46 мин. 40 сек.

Оказывается, что ширина полосы из миллиона волос достигала бы примерно ста метров. Ее трудно было бы протянуть поперек самой широкой столичной улицы! Это кажется невероятным, но дайте себе труд сделать подсчет, и вы убедитесь, что так и есть:

$$0,1 \text{ мм} \times 1\,000\,000 = 0,1 \text{ м} \times 1000 = 0,1 \text{ км} = 100 \text{ м}^1).$$

УПРАЖНЕНИЯ С МИЛЛИОНОМ

Проделайте — лучше всего устно — еще ряд упражнений, чтобы освоиться надлежащим образом с величиной миллиона.

1. Величина обыкновенной комнатной мухи общеизвестна — около 7 мм в длину. Но какова была бы ее длина при увеличении в миллион раз?

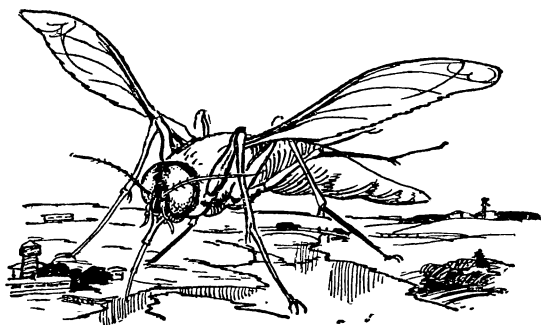


Рис. 53. Комар при увеличении в миллион раз.

Решение. Умножим 7 мм на 1 000 000, получим 7 км — примерно ширина крупного города. Значит, муха, увеличенная линейно в миллион раз, могла бы покрыть его своим телом. Даже комар, увеличенный в миллион раз, выглядел бы также весьма внушительно (см. рис. 53).

2. Увеличьте мысленно в миллион раз (по ширине) ваши карманные часы — и получите снова поражающий результат; едва ли вам удастся предугадать его без расчета. Какой?

¹⁾ Мы проделали здесь умножение следующим путем: вместо умножения числа мы дважды заменили самую единицу меры другою, в тысячу раз большею. Этот прием очень удобен для устных подсчетов, и им следует пользоваться при выкладках с метрическими мерами.

Р е ш е н и е. Часы имели бы ширину километров 50, а каждая цифра простиралась бы на географическую милю (7 км).

3. Какого роста достигал бы человек, в миллион раз выше обычного роста?

Р е ш е н и е. 1700 километров. Он был бы всего в 8 раз меньше поперечника земного шара. Буквально одним шагом мог бы он перешагнуть из Ленинграда в Москву, а если бы лег (рис. 54), то растянулся бы от Финского залива до Крыма...

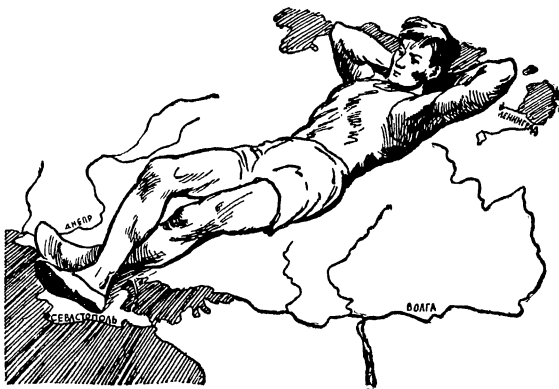


Рис. 54. Человек, увеличенный в миллион раз, растянулся бы от Финского залива до Крыма.

Приведу еще несколько готовых подсчетов того же рода, предоставляя проверку их читателю.

Сделав м и л л и о н ш а г о в по одному направлению, вы отошли бы километров на 600. От Москвы до Ленинграда миллион с лишним шагов.

М и л л и о н ч е л о в е к, выстроенных в одну шеренгу плечом к плечу, растянулись бы на 250 км.

М и л л и о н т о ч е к типографского шрифта — например, этой книги, — поставленных рядом вплотную, вытянулись бы в линию длиною в сотню метров.

Зачерпывая м и л л и о н р а з н а п е р с т к о м, вы вычерпаете около тонны воды.

Книга в м и л л и о н с т р а н и ц имела бы в толщину метров 50.

М и л л и о н б у к в заключает книга убористой печати в 600—800 страниц среднего формата.

М и л л и о н д н е й — более 27 столетий. От начала нашей эры не прошло еще миллиона дней!

Проделав упражнения с миллионом, мы теперь сможем по достоинству оценить тот огромный путь, который прошел третий советский искусственный спутник Земли, запущенный 15 мая 1958 г. За один только год он облетел Землю почти 5100 раз и за это время прошел путь, превышающий 230 миллионов километров. Это составляет свыше полутора расстояний до Солнца. Если бы наш космический разведчик курсировал между Землей и Луной, то за этот год он бы 300 раз слетал на Луну и обратно ¹⁾.

Для сравнения заметим, что самолет ТУ-104 при средней скорости полета 800 км в час смог бы преодолеть такое расстояние лишь за 32 года и 9 месяцев непрерывного полета. Если принять, что в среднем скорость движения автомобиля равна 80 км в час, то он смог бы пройти такой путь только за 330 лет.

НАЗВАНИЯ ЧИСЛОВЫХ ВЕЛИКАНОВ

Мы беседовали сейчас о миллионах. Прежде чем перейти к еще большим числовым гигантам, остановимся на их названиях, принятых в нашей стране и в ряде других стран.

В начале книги мы упоминали о разрядах и классах нашей десятичной позиционной системы счисления. Так вот, к сказанному ранее добавим теперь, что **м и л л и о н** — это тысяча тысяч, т. е. единица третьего класса. Затем идут десятки и сотни миллионов. Тысяча миллионов образуют единицу четвертого класса, называемую **м и л л и а р д о м**. Иногда миллиард называют **б и л л и о н о м**, однако у нас это не принято. Итак, один миллиард равен 1000 миллионов. Он записывается в виде

1 000 000 000,

т. е. единицы с девятью нулями.

Тысяча миллиардов образуют единицу пятого класса, носящую название **т р и л л и о н**. Таким образом, один триллион равен миллиону миллионов и записывается в виде единицы с двенадцатью нулями:

1 000 000 000 000.

¹⁾ Расстояние в среднем от Земли до Солнца равно 150 миллионам километров, а от Земли до Луны равно 384 400 километрам.

Если вас интересуют наименования сверхисполинов, следующих за триллионом, то изучите приведенную здесь табличку:

<i>Наименование числового исполина</i>	<i>Сколько нулей при единице</i>
квадрильон	15
квинтильон	18
секстильон	21
септильон	24
октильон	27
нонильон	30
децильон	33
ундецильон	36
додэцильон	39

Далее наименований не имеется. Но и эти, в сущности, почти не употребляются и мало кому известны.

В некоторых странах принят другой порядок названий классов, так что названия классов, совпадающие с принятыми у нас, имеют там совсем другие значения. Под словом б и л л и о н там понимают не тысячу, а миллион миллионов, т. е. единицу с 12-ю нулями, под словом т р и л л и о н понимают единицу с 18-ю нулями, т. е. миллион миллионов миллионов, а под словом к в а д р и л ь о н — единицу с 24-мя нулями, т. е. миллион миллионов миллионов миллионов, и т. д. Короче говоря: в этих странах каждое новое высшее наименование принято давать м и л л и о н у низших (а не т ы с ь я ч е низших, как у нас). Во избежание недоразумений следует поэтому наименование всегда сопровождать цифрами. Это, пожалуй, единственный случай в практике, когда обозначение суммы прописью не поясняет, а только затемняет написанное цифрами.

Следует, однако, заметить, что в научных книгах и на практике принят совсем другой способ обозначений числовых великанов, который совершенно исключает всякую возможность их двойных толкований. Этот способ основан на использовании действия возведения в степень. Например, один т р и л л и о н, т. е. единица с 12-ю нулями, представляет собой число 10, взятое сомножителем 12 раз. Это кратко записывается так:

$$1\,000\,000\,000\,000 = 1 \cdot 10^{12},$$

т. е. один триллион — это единица, умноженная на 10 в 12-й степени.

Приведем еще пример. Число 2 квадрильона 400 триллионов запишется кратко так: $2,4 \cdot 10^{15}$, потому что один квадрильон — это единица с 15 нулями (см. приведенную выше табличку).

При таком способе обозначений очень больших чисел, часто встречающихся в физике и астрономии, сберегается место и, кроме того, гораздо легче прочесть эти числа и производить над ними различные действия¹⁾.

МИЛЛИАРД

Миллиард — одно из самых молодых названий чисел. Оно вошло в употребление лишь со времени окончания франко-прусской войны (1871 г.), когда французам пришлось уплатить Германии контрибуцию в 5 000 000 000 франков. Как и миллион, слово миллиард происходит от корня «милле» (тысяча) и представляет собою итальянское увеличительное от этого существительного.

Чтобы составить себе представление об огромности миллиарда, подумайте о том, что в книжке, которую вы сейчас читаете, заключается немногим более 300 000 букв. В трех таких книжках окажется один миллион букв. А миллиард букв будет заключать в себе стопка из 30 000 экземпляров этой книжки — стопка, которая, будучи аккуратно сложена, составила бы столб высотой с Ленинградский антирелигиозный музей (бывший Исаакиевский собор).

В одном кубометре содержится кубических миллиметров ровно миллиард ($1000 \times 1000 \times 1000$). Попробуем подсчитать, какой высоты получился бы столб, если бы все эти крошечные миллиметровые кубики были поставлены один на другой. Итог получается поразительный — 1000 километров!

Миллиард минут составляет более 19 столетий; человечество всего пятьдесят с лишним лет назад (29 апреля 1902 г. в 10 часов 40 минут) начало считать второй миллиард минут от начала нашей эры.

Числовой великан миллиард мы можем обнаружить и внутри нашего тела. Малейший укол в любом его участке вызывает появление крови. Задумывались ли вы когда-

¹⁾ См. об этом подробнее в книге: Я. И. Перельман, Занимательная алгебра.

нибудь над таким вопросом: сколько же необходимо иметь в теле мельчайших кровеносных сосудов, так называемых капилляров? Оказывается, что в теле человека имеется более 100 миллиардов капилляров. Общая длина их достигает 60—80 тысяч километров. Нитью из капилляров человека можно было бы почти дважды опоясать Землю по экватору.

ПЛАН-ВЕЛИКАН

Теперь мы уже достаточно натренированы для того, чтобы гораздо лучше представить себе всю грандиозность контрольных цифр семилетнего плана, принятых на XXI съезде нашей Коммунистической партии на 1959—1965 гг.

Основу могущества нашей социалистической родины составляет тяжелая промышленность. Это добыча каменного угля, нефти, газа, выработка электроэнергии, выплавка чугуна и стали, производство проката.

Начнем с каменного угля. Планом намечено довести добычу его в 1965 г. до 600—612 миллионов тонн. Ведь для того, чтобы перевезти такое колоссальное количество угля, понадобится более 12 миллионов вагонов грузоподъемностью по 50 тонн каждый. Поезд, составленный из такого количества вагонов, смог бы 2½ раза опоясать Землю по экватору (рис. 55).

Мы говорили выше о пирамиде Хеопса — высочайшей пирамиде древнего Египта, а знаете ли вы, что из каменного угля, добытого в 1965 г., можно было бы сложить 170 таких пирамид?

К 1965 г. намечено довести

выплавку чугуна до 65—70 миллионов тонн,

выплавку стали до 86—91 миллиона тонн,

производство проката до 65—70 миллионов тонн,

добычу нефти до 230—240 миллионов тонн.

Попробуйте подсчитать, сколько будет произведено за каждый день 1965 г., и вы убедитесь сами в грандиозности плана.

Только за 15 дней 1965 г. будет добыто нефти и выплавлено стали больше, чем в царской России за весь 1913 г.

Гораздо более разительные примеры представляют собой контрольные цифры по производству электроэнергии и добыче газа.

500—520 миллиардов киловатт-часов электроэнергии выработают в 1965 г. все электростанции нашей необъятной

родины, т. е. по 1,4 миллиарда киловатт-часов ежедневно. Чтобы представить себе это число-исполин, приведем такое сравнение. Один киловатт-час электроэнергии может совершить примерно столько же работы, сколько двое сильных рабочих за день. Таким образом, в 1965 г. на наших заводах, шахтах, рудниках, фабриках, стройках, совхозах, колхозах будет ежедневно трудиться 2 миллиарда 800 миллионов «электрических рабочих», т. е. столько же, сколько всех людей на земном шаре. Хочется еще добавить, что

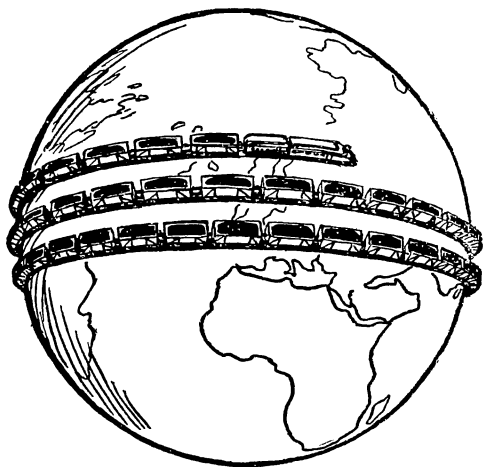


Рис. 55. Поезд с углем, который намечено добыть в 1965 г., смог бы $2\frac{1}{2}$ раза опоясать Землю по экватору.

в 1965 г. в течение 32 часов будет вырабатываться столько же электроэнергии, сколько ее было выработано в царской России за весь 1913 г.

Намечено в 1965 г. добыть 150 миллиардов кубических метров газа. Ведь для того, чтобы хранить весь этот газ в одном баллоне, понадобилось бы построить, например, шарообразный баллон, диаметр которого превышал бы 6,5 километра.

Теперь поговорим коротко о хлебе, продуктах и товарах широкого потребления. Если бы мы стали подробно рассказывать обо всех числовых гигантах семилетнего плана, то пришлось бы, пожалуй, написать новую книгу побольше этой.

В 1965 г. намечено собрать урожай зерна в 10—11 миллиардов пудов (в 1958 г. было собрано 8,5 миллиарда пудов). Попробуем наглядно представить себе весь этот урожай.

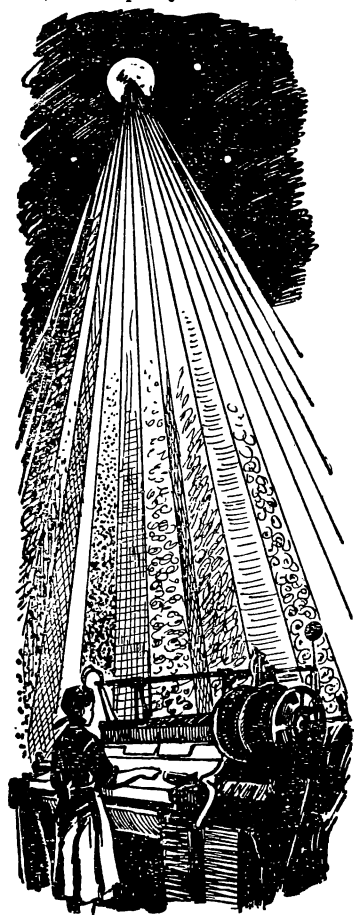


Рис. 56. Лента из всех хлопчатобумажных тканей выработки 1965 г. уложилась бы 20 раз между Землей и Луной.

В переводе на тонны это составляет 160 — 176 миллионов тонн. Для перевозки такого количества зерна понадобилось бы 40 — 44 миллиона автомашин грузоподъемностью в 4 тонны каждая. Выстроенные в одну линию, они составили бы автопоезд, длина которого значительно превышала бы половину расстояния от Земли до Луны.

Приведем лишь некоторые из числовых великанов плана выпуска продукции пищевой и легкой промышленности в последнем году семилетки. В 1965 г. намечено выработать

более 6 миллионов тонн мяса,
1 миллион тонн животного масла,
13,5 миллиона тонн цельномолочной продукции,
9,2—10 миллионов тонн сахара-песка,
около 8 миллиардов метров хлопчатобумажных тканей,
 $\frac{1}{2}$ миллиарда метров шерстяных тканей,
около $1\frac{1}{2}$ миллиардов метров шелковых тканей,
более $\frac{1}{2}$ миллиарда пар кожаной обуви.

Приведем некоторые сравнения. Если бы кто-нибудь пожелал перемерить всю выработку хлопчатобумажной ткани в 1965 г. по одному метру в секунду, он должен был бы мерить в течение более

800 лет по 10 часов ежедневно. А если представить себе все штуки этой ткани развернутыми и соединенными в одну полосу метровой ширины, то такой полосой можно было бы опоясать Землю по экватору 200 раз. Подобная лента уложилась бы между Землей и Луной 20 раз (рис. 56).

В 1965 г. будет издано 2 миллиарда экземпляров книг. Самая крупная в мире библиотека — Библиотека им. В. И. Ленина в Москве — насчитывает 12 миллионов экземпляров книг. Таким образом, из всех книг, которые выйдут в 1965 г., можно было бы скомплектовать 166 таких огромных библиотек. Если принять среднюю толщину одной книги даже за 1 сантиметр, то, чтобы уложить все эти книги, понадобилось бы полوك общей длиной в 20 тысяч километров.

ТРИЛЛИОН

Ощутить огромность этого числового исполина трудно даже человеку, привычному к обращению с миллионами. Великан-миллион — такой же карлик рядом со сверхвеликаном-триллионом, как единица рядом с миллионом. Об этом взаимоотношении мы обыкновенно забываем и в своем воображении не делаем большой разницы между миллионом и триллионом. Мы уподобляемся здесь тем первобытным народам, которые умеют считать только до 2 или 3, а все числа свыше их обозначают словом **м н о г о**.

Подобно тому, как ботокудам¹⁾ кажется несущественной разница между двумя и тремя, так и многим современным культурным людям представляется несущественной разница между миллионом и триллионом. По крайней мере они не думают о том, что одно из этих чисел в миллион раз больше другого и что, значит, первое относится ко второму приблизительно так, как расстояние от Москвы до Сан-Франциско относится к ширине улицы.

Волос, увеличенный по толщине в **т р и л л и о н** раз, был бы раз в 8 шире земного шара, а муха при таком увеличении была бы в 70 раз толще Солнца.

В 1958 г. вышло 1,1 миллиарда книг. Если принять, что в среднем каждая книга содержит 160 000 букв (столько букв вмещается примерно на 80 страницах такого же фор-

¹⁾ Ботокуды — индейское племя Бразилии, почти целиком истреблено.

мата, как эта книжка), то количество букв во всех этих экземплярах книг будет равно, круглым числом, 150 т р и л л и о н а м. Расставленные в ряд, вплотную одна к другой, они образовали бы нить, которая протянулась бы от Земли до Солнца.

Грузооборот всех видов транспорта составит в 1965 г. 2,5 т р и л л и о н а тонно-километров. Это значит, что всеми видами транспорта можно было бы в 1965 г. перевезти груз в 16,5 тысячи тонн на расстояние от Земли до Солнца.

И наконец, самый крупный гигант из всех чисел семилетнего плана — это объем государственных капитальных вложений на 1959—1965 гг., он намечен в сумме двух триллионов рублей. За этим гигантским числом стоят тысячи заводов, фабрик, электростанций, нефтяных и газовых скважин, шахт, разрезов, новых дорог, целые новые города жилых домов.

ЧИСЛА-СВЕРХГИГАНТЫ

В старинной (XVIII век) «Арифметике» Магницкого, о которой мы не раз уже упоминали, приводится таблица названий классов чисел, доведенная до квадрильона, т. е. единицы с 24 нулями ¹⁾.

Это было большим шагом вперед по сравнению с более древним числовым инвентарем наших предков. Древняя славянская лестница больших чисел была до XV века гораздо скромнее и достигала только до ста миллионов. Вот эта старинная нумерация:

«тысяща».....	1 000
«тьма».....	10 000
«легион».....	100 000
«леодр».....	1 000 000
«вран».....	10 000 000
«колода».....	100 000 000

¹⁾ Магницкий придерживался той классификации чисел, которая дает каждое новое наименование м и л л и о н у низших единиц (биллион — миллион миллионов и т. д.).

В нашей системе наименований единица с 24 нулями называется с е п т и л ь о н о м (см.табличку на стр. 160). В дальнейшем всюду имеется в виду приведенная в табличке система наименований.

Магницкий широко раздвинул в своей табличке древние пределы больших чисел. Но он считал практически бесполезным продолжать систему наименований числовых великанов чересчур далеко. Вслед за таблицей он помещает такие стихи:

Число есть бесконечно,
умовъ нам недотечно.
Нестъ бо намъ о предельно,
темъ же есть и бездельно
Множайшихъ чисель искати
и больше сей писати

Превосходной таблицы,
умовъ нашихъ границы.
И аще кому треба
счисляти что внутрь неба
Довлеетъ числа его
к вешемъ всемъ мира сего.

Старинный математик хотел сказать этими стихами, что так как ум человеческий не может объять бесконечного ряда чисел, то бесцельно составлять числа больше тех, которые представлены в его таблице, «умовъ нашихъ границе». Закрывающиеся в ней числа (от единицы до септильона, т. е. до $1 \cdot 10^{24}$ включительно) достаточны, по его мнению, для исчисления всех вещей видимого мира — для каждого «кому треба счисляти что внутрь неба».

Любопытно, что еще и в наши дни упомянутая сейчас таблица Магницкого почти достаточна для тех исследователей природы, которым «треба счисляти что внутрь неба». При измерении расстояний до отдаленнейших светил, едва улавливаемых с помощью сильнейшего телескопа или радиотелескопов, астрономам не приходится обращаться к наименованиям свыше миллиарда. Самые отдаленные из известных нам небесных тел отстоят от Земли больше чем на миллиард «световых лет». Если бы мы пожелали даже выразить это расстояние в сантиметрах, то получили бы около 10 000 септильонов; значит, мы и тогда не вышли бы еще из пределов таблицы Магницкого.

Обращаясь в другую сторону, к миру весьма малых величин, мы и здесь не ощущаем пока надобности пользоваться числами свыше септильонов. Число молекул в кубическом сантиметре газа — одно из самых больших множеств, реально исчисленных, — выражается десятками квинтильонов. Число колебаний в секунду для самых коротких из известных ныне электромагнитных волн не превышает 1 секстильона, т. е. $1 \cdot 10^{21}$. Если бы мы вздумали подсчитать сколько капель в океане (приравнивая объем капли 1 куб. мм, что весьма немного), нам и тогда не пришлось бы обратиться к наименова-

ниям выше септильона, потому что число это исчисляется только тысячами септильонов.

И лишь при желании выразить, сколько грамм ов вещества заключает вся наша солнечная система, понадобились бы наименования выше септильона, так как в числе этом 34 цифры (2 и 33 нуля): $2 \cdot 10^{33}$.

ПОЖИРАТЕЛИ ЧИСЛОВЫХ ИСПОЛИНОВ

В заключение остановимся на арифметическом (вернее, пожалуй, геометрическом) великане особого рода — на кубической миле; мы имеем в виду г е о г р а ф и ч е с к у ю милю, составляющую 15-ю долю экваториального градуса и заключающую 7420 метров. С кубическими мерами воображение наше справляется довольно слабо; мы обычно значительно преуменьшаем их величину — особенно для крупных единиц, с которыми приходится иметь дело в астрономии. Но если мы превратно представляем себе уже кубическую милю — самую большую из наших объемных мер, то как ошибочны должны быть наши представления об объеме земного шара, других планет, Солнца. Стоит поэтому уделить немного времени и внимания, чтобы постараться приобрести более соответствующее представление о кубической миле.

В дальнейшем воспользуемся картинным изложением из одной полузабытой книжечки «Фантастическое путешествие через вселенную» (появившейся около 100 лет тому назад).

«Положим, что по прямому шоссе мы можем видеть на целую милю ($7\frac{1}{2}$ км) вперед. Сделаем мачту длиною в милю и поставим ее на одном конце дороги, у верстового столба. Теперь взглянем вверх и посмотрим, как высока наша мачта. Положим, что возле этой мачты стоит одинаковой с ней высоты человеческая статуя — статуя более семи километров высоты. В такой статуе колено будет находиться на высоте 1800 метров; нужно было бы взгромоздить одну на другую 25 египетских пирамид, чтобы достигнуть поясницы статуи.

Вообразим теперь, что мы поставили две такие мачты вышиною в милю на расстоянии мили одну от другой и соединили обе мачты досками; получилась бы стена в милю длины и милю вышины. Это — квадратная миля.

Мы имеем деревянную стену, стоящую отвесно. Представим себе четыре подобные стены, сколоченные вместе, как ящик (рис. 57). Сверху прикроем его крышкой в милю длины и милю ширины. Ящик этот займет объем кубической мили. Посмотрим теперь, как он велик, т. е. что и сколько в нем может поместиться.

Начнем с того, что, сняв крышку, бросим в ящик все здания Ленинграда. Они займут там очень немного места.

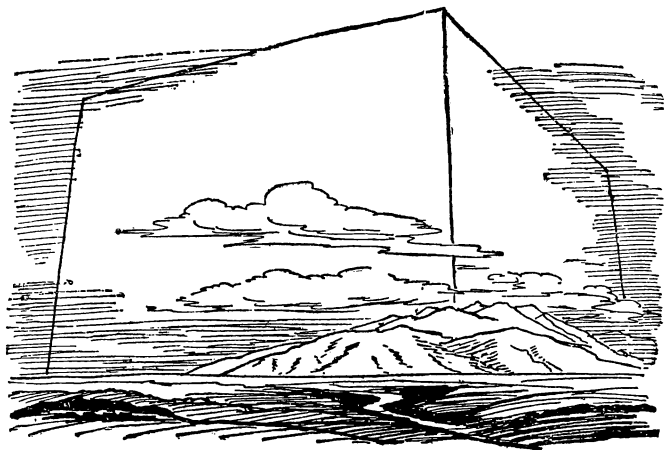


Рис. 57. Ящик объемом в одну кубическую географическую милю мог бы вместить здания всего мира, флоты всех государств, все машины и сооружения пяти частей света, население всего земного шара, всех животных нашей планеты, притом не был бы еще полон доверху.

Отправимся в Москву и по дороге захватим все крупные и мелкие города. Но так как все это покрыло только дно ящика, то для заполнения его поищем материалов в другом месте. Возьмем Париж со всеми его триумфальными воротами и Эйфелевой башней и бросим туда же. Все это летит, как в пропасть; прибавка едва заметна. Прибавим Лондон, Вену, Берлин. Но так как всего этого мало, чтобы хоть сколько-нибудь заполнить пустоту в ящике, то станем бросать туда без разбора все города, крепости, замки, деревни, отдельные здания. Все-таки мало. Бросим туда все, что только сделано руками человека в Европе; но и с этим ящик едва наполняется до одной четверти. Прибавим все корабли мира, и это мало помогает. Бросим в ящик все египетские пирамиды, все рельсы Старого и Нового Света, все машины

и фабрики мира — все, что сделано людьми в Азии, Африке, Америке, Австралии. Ящик заполняется едва до половины. Встряхнем его, чтобы все в нем улеглось ровнее, и попробуем, нельзя ли дополнить его людьми.

Соберем всю солому и всю хлопчатую бумагу, существующую в мире, и расстелем ее в ящике — мы получим слой, предохраняющий людей от ушибов, сопряженных с выполнением подобного опыта. Все население Германии уляжется в первом слое. Покроем его мягким слоем в фут толщиной и уложим еще столько же. Покроем и этот слой и, кладя далее слой на слой, поместим в ящике все население Европы, Азии, Африки, Америки, Австралии... Все это заняло не более 50 слоев, т. е., считая слой толщиной в метр, — всего 50 метров. Понадобилось бы в десятки раз больше людей, чем их существует на свете, чтобы наполнить вторую половину ящика...

Что же нам делать? Если бы мы пожелали поместить в ящике весь живой мир — всех лошадей, быков, ослов, мулов, баранов, верблюдов, на них положить всех птиц, рыб, змей, все, что летает и ползает, — то и тогда не наполнили бы ящика доверху без помощи скал и песка.

Такова кубическая миля. А из земного шара можно сделать 660 миллионов подобных ящиков. При всем почтении к кубической миле, к земному шару приходится питать еще большее уважение».

К сказанному прибавим еще от себя, что кубическая миля пшеничных зерен насчитывала бы их несколько квинтильонов. Как видите, этот кубический исполин — настоящий пожиратель других исполинов ¹⁾.

ИСПОЛИНЫ ВРЕМЕНИ

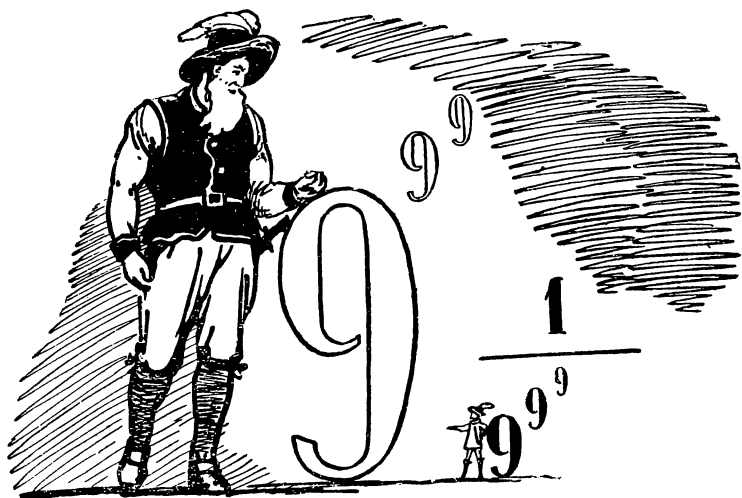
Огромные промежутки времени представляются нами еще более смутно, чем огромные расстояния и объемы. Геология учит, что со времени отложения наиболее древних пластов земной коры протекли сотни миллионов лет. Как ощутить неизмеримую огромность таких периодов времени? Один ученый предлагает для этого такой способ:

¹⁾ И все же внушительность этого кубического исполина значительно уменьшается, если учесть, что весь газ, который намечено добыть в 1965 г., занял бы более одной трети объема этого пожирателя числовых исполинов.

«Все протяжение истории Земли представим в виде прямой линии в 500 км. Это расстояние пусть изображает те 500 миллионов лет, которые протекли от начала к е м б р и й с к о й эпохи (одна из древнейших эпох истории земной коры). Так как километр представляет длительность миллиона лет, то последние 500—1000 м изобразят длительность л е д н и к о в о г о периода, а 6000 лет мировой истории сократятся до 6 м — длины комнаты, в масштабе которой 70 лет жизни человека представляются линией в 7 см. Если заставить улитку проползти все названное расстояние с нормальной для нее скоростью 3,1 мм в секунду, то на все расстояние ей понадобится ровно 5 лет. А все протяжение от начала первой мировой войны до наших дней она одолеет в 40 секунд... Мы видим, как ничтожны в масштабе истории Земли те небольшие сроки, которые человек может объять своим умом».

Арифметические курьезы

$$100 = \begin{cases} 1\frac{6}{7} + 3 + 95\frac{4}{28} \\ 57\frac{3}{6} + 42\frac{9}{18} \end{cases}$$



ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

ЧИСЛОВЫЕ ЛИЛИПУТЫ

ОТ ВЕЛИКАНОВ К КАРЛИКАМ

Гулливвер в своих странствованиях, покинув лилипутов, очутился среди великанов. Мы путешествуем в обратном порядке: познакомившись с числовыми исполинами, переходим к миру лилипутов — к числам, которые во столько же раз меньше единицы, во сколько единица меньше арифметического великана.

Разыскать представителей этого мира не составляет никакого труда. Для этого достаточно написать ряд чисел, обратных миллиону, миллиарду, триллиону и т. д., т. е. делить единицу на эти числа. Получающиеся дроби

$$\frac{1}{1\,000\,000}, \quad \frac{1}{1\,000\,000\,000}, \quad \frac{1}{1\,000\,000\,000\,000} \text{ и т. д.}$$

— типичные числовые лилипуты, такие же пигмеи по сравнению с единицей, каким является единица по сравнению

с миллионом, миллиардом, триллионом и прочими числовыми исполинами.

Вы видите, что каждому числу-исполину соответствует число-лилипут и что, следовательно, числовых лилипутов существует не меньше, чем исполинов. Для них также придуман сокращенный способ обозначения. Мы уже упоминали (стр. 160), что весьма большие числа в научных сочинениях (по астрономии, физике) обозначаются так:

$$\begin{array}{rcl} 1\,000\,000\dots & 10^6 \\ 10\,000\,000\dots & 10^7 \\ 400\,000\,000\dots & 4 \cdot 10^8 \\ 6 \text{ квадрильонов} & 6 \cdot 10^{15} \text{ и т. д.} \end{array}$$

Соответственно этому числовые лилипуты обозначаются следующим образом:

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{1\,000\,000}\dots\dots & 10^{-6} \\ \frac{1}{100\,000\,000}\dots\dots & 10^{-8} \\ \frac{3}{1\,000\,000\,000}\dots\dots & 3 \cdot 10^{-9} \text{ и т. д.} \end{array}$$

Есть ли, однако, реальная надобность в подобных дробях? Приходится ли когда-нибудь действительно иметь дело со столь мелкими долями единицы?

Об этом интересно побеседовать подробнее

ЛИЛИПУТЫ ВРЕМЕНИ

Секунда по обычному представлению — настолько малый промежуток времени, что с весьма мелкими частями ее не приходится иметь дела ни при каких обстоятельствах. Легко написать $\frac{1}{1000}$ секунды, но это чисто бумажная величина, потому что ничего будто бы не может произойти в такой ничтожный промежуток времени.

Так думают многие, но ошибаются, потому что в тысячную долю секунды могут успеть совершиться весьма многие явления.

Поезд, проходящий 36 км в час, делает в секунду 10 м и, следовательно, в течение 1000-й доли секунды успевает

продвинуться на один сантиметр. Звук в воздухе переносится в течение 1000-й доли секунды на 33 см, а пуля, покидающая ружейный ствол со скоростью 700—800 м в секунду, переносится за тот же промежуток времени на 70 см. Земной шар перемещается каждую 1000-ю долю секунды в своем обращении вокруг Солнца на 30 м. Струна, издающая высокий тон, делает в 1000-ю долю секунды 2—4 и более полных колебаний; даже комар успевает в это время взмахнуть вверх или вниз своими крылышками. Молния длится гораздо меньше 1000-й доли секунды; в течение этого промежутка времени успевает возникнуть и прекратиться столь значительное явление природы (молния простирается в длину на целые километры).

Но — возразят, пожалуй — 1000-ю долю секунды еще нельзя признать за лилипута, как никто не назовет тысячу числовым гигантом. Вот если взять м и л л и о н н у ю долю секунды, то уж наверное можно утверждать, что это — величина нереальная, промежуток времени, в течение которого ничего произойти не может. Ошибаетесь! Даже и одна миллионная доля секунды, — для современного физика, например, — вовсе не чрезмерно маленький промежуток.

В области явлений световых (и электрических) ученому сплошь и рядом приходится иметь дело с гораздо более мелкими частями секунды. Напомним прежде всего, что световой луч пробегает каждую секунду (в пустоте) 300 000 км; следовательно, в 1 000 000-ю долю секунды свет успевает перенестись на расстояние 300 м — примерно настолько же, насколько переносится в воздухе звук в течение целой секунды.

Далее, свет есть явление волнообразное, и число световых волн, минующих каждую секунду каждую точку пространства, исчисляется сотнями триллионов. Те световые волны, которые, действуя на наш глаз, вызывают ощущение красного света, имеют частоту колебаний 400 триллионов в секунду; это значит, что в течение одной 1 000 000-й доли секунды в наш глаз вступает 400 000 000 волн, а одна волна вступает в глаз в течение 400 000 000 000 000-й доли секунды. Вот подлинный числовой лилипут!

Но этот несомненный, реально существующий лилипут является истинным великаном по сравнению с еще более мелкими долями секунды, с которыми физик встречается при изучении рентгеновых лучей. Эти удивительные лучи,

обладающие свойством проникать через многие непрозрачные тела, представляют собою, как и видимые лучи, волнообразное явление, но частота колебаний у них значительно больше, чем у видимых: она достигает 2500 триллионов в секунду. Волны следуют тут одна за другой в 60 раз чаще, чем в лучах видимого красного света. Лучи «гамма» обладают частотой еще большей, чем лучи Рентгена.

Значит, и в мире лилипутов существуют свои великаны и карлики. Гулливер был выше лилипутов всего в дюжину раз и казался им великаном. Здесь же один лилипут больше другого в пять дюжин раз и, следовательно, имеет все права именоваться по отношению к нему исполином.

ЛИЛИПУТЫ ПРОСТРАНСТВА

Интересно рассмотреть теперь, какие наименьшие расстояния приходится отмеривать и оценивать современным исследователям природы.

В метрической системе мер наименьшая единица длины для обиходного употребления — миллиметр, он примерно вдвое меньше толщины спички. Чтобы измерить предметы, видимые простым глазом, такая единица длины достаточно мелка. Но для измерения бактерий и других мелких объектов, различимых только в сильные микроскопы, миллиметр чересчур крупен. Ученые обращаются для таких измерений к более мелкой единице — микрону, который в 1000 раз меньше миллиметра. Так называемые красные кровяные тельца, которые насчитываются десятками миллионов в каждой капельке нашей крови, имеют в длину 7 микрон и в толщину 2 микрона. Стопка из 1000 таких телец имеет толщину спички.

Как ни мелок кажется нам микрон, он все же, оказывается, чрезмерно крупен для расстояний, которые приходится измерять современному физику. Мельчайшие, недоступные даже микроскопу частицы молекулы, из которых состоит вещество всех тел природы, и слагающие их еще более мелкие атомы имеют размеры от одной 100-й до одной 1000-й доли микрона ¹⁾. Если остановиться на первой, большей величине, то тогда окажется, что миллион таких

¹⁾ Мельчайшая единица длины, употребляемая в современной физике, есть *икс*; он равен 10 000 000-й доле микрона.

крупинок (а мы уже знаем, как велик миллион), будучи расположен на одной прямой, вплотную друг к другу, занял бы всего один миллиметр!

Чтобы представить себе наглядно чрезвычайную малость атомов, обратимся к такой картине. Вообразите, что все предметы на земном шаре увеличились в миллион раз. Эйфелева башня (300 м высоты) уходила бы тогда своей верхушкой на 300 000 км в мировое пространство и находилась бы в недалеком соседстве от орбиты Луны. Люди были бы величиной в $\frac{1}{4}$ земного радиуса — 1700 км; один шаг такого человека-гиганта унес бы его на 600—700 км. Мельчайшие красные тельца, миллиардами плавающие в его крови, имели бы каждое более 7 м в поперечнике. Волос имел бы 100 м в толщину. Мышь достигала бы 100 км в длину, муха — 7 км.

Каких же размеров будет при таком чудовищном увеличении атом вещества?

Положительно не верится: его размеры предстанут перед нами в виде... типографской точки шрифта этой книги!

Достигаем ли мы здесь крайних пределов пространственной малости, за которые не приходится переступать даже физику с его изощренными приемами измерений? Еще не особенно давно думали так, но теперь доказано, что атом — целый мир, состоящий из гораздо более мелких частей и являющийся ареною действия могущественных сил. Атом, например, водорода состоит из центрального «ядра» и быстро обращающегося вокруг него «электрона». Не входя в другие подробности, скажем только, что поперечник электрона измеряется триллионными долями миллиметра. Другими словами, поперечник электрона почти в миллион раз меньше поперечника атома. Если же пожелаете сравнить размеры электрона с размерами пылинки, то расчет покажет вам, что электрон меньше пылинки примерно во столько же раз, во сколько пылинка меньше — чего бы вы думали? — земного шара!

Вы видите, что атом — лилипут среди лилипутов — является в то же время настоящим исполином по сравнению с электроном, входящим в его состав, таким же исполином, каким вся солнечная система является по отношению к земному шару.

Можно составить следующую поучительную лестницу, в которой каждая ступень является исполином по отноше-

нию к предыдущей ступени и лилипутом по отношению к последующей:

*электрон
атом
пылинка
дом
земной шар
солнечная система
расстояние до Полярной звезды
Млечный Путь*

Каждый член этого ряда примерно в четверть миллиона раз ¹⁾ больше предыдущего и во столько же раз меньше последующего. Ничто не доказывает так красноречиво всю относительность понятий «большой» и «малый», как эта табличка. В природе нет безусловно большого или безусловно малого предмета. Каждая вещь может быть названа и подавляюще огромной, и исчезающе малой, в зависимости от того, как на нее взглянуть, с чем ее сравнить.

СВЕРХИСПОЛИН И СВЕРХЛИЛИПУТ

Наши беседы о великанах и карликах из мира чисел были бы неполны, если бы мы не рассказали читателю об одной изумительной диковинке этого рода, диковинке, правда, не новой, но стоящей дюжины новинок. Чтобы подойти к ней, начнем со следующей, на вид весьма незамысловатой задачи:

Какое самое большое число можно написать тремя цифрами, не употребляя никаких знаков действий?

Хочется ответить: 999, но, вероятно, вы уже подозреваете, что ответ иной; иначе задача была бы чересчур проста. И, действительно, правильный ответ пишется так:

$$9^{9^9}.$$

¹⁾ Имеются в виду линейные размеры (а не объемы), т. е. поперечник атома, диаметр солнечной системы, высота или длина дома и т. п. Подробнее о такого рода сопоставлениях см. мою книгу «Знаете ли вы физику?».

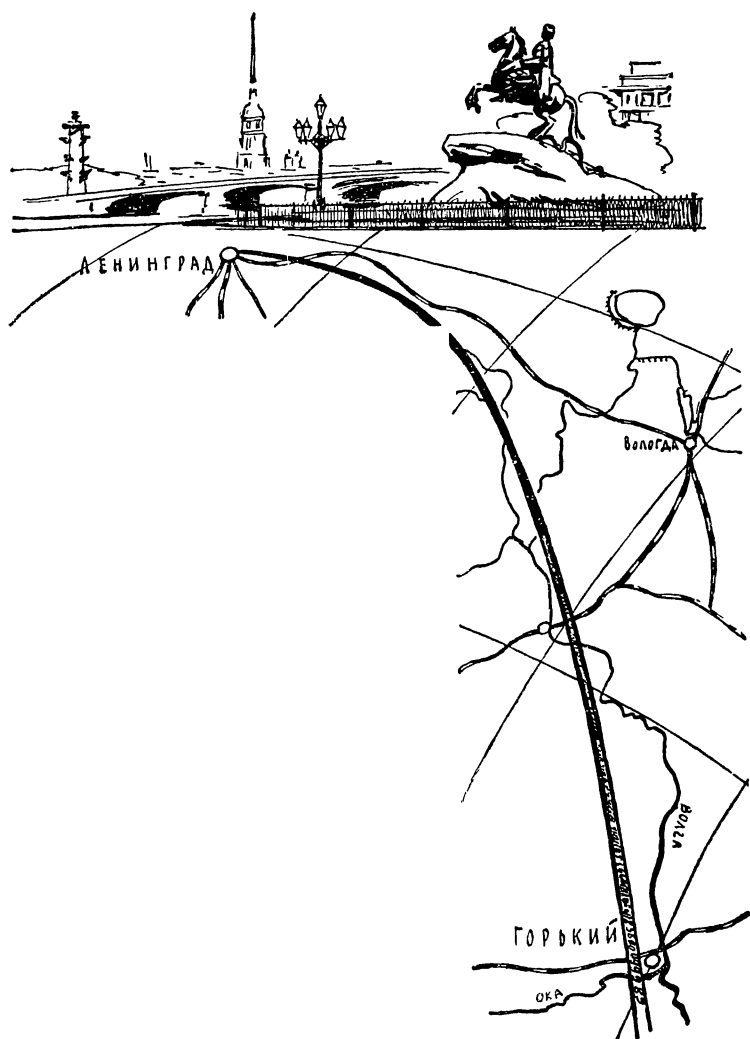


Рис. 58. Число, выражаемое степенью 9^9 , состоит из 370 миллионов цифр. Если бы написать все эти цифры тесно одна к другой на бумажной ленте, она протянулась бы на тысячу километров от Ленинграда до Горького.

Выражение это означает «девять в степени девять в девятой степени» ¹⁾. Другими словами: нужно составить произведение из столькох девяток, сколько единиц в результате умножения:

$$9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9.$$

Достаточно только **н а ч а т ь** вычисление, чтобы ощутить огромность ожидаемого результата. Если у вас хватит терпения выполнить перемножение девяти девяток, вы получите число

387 420 489.

Главная работа только начинается: теперь нужно найти

9387420489,

т. е. произведение 387 420 489 девяток. Придется сделать, круглым счетом, 400 миллионов умножений...

У вас, конечно, не будет времени довести до конца подобное вычисление. Но я лишен возможности сообщить вам готовый результат — по трем причинам, которые нельзя не признать уважительными. Во-первых, число это никогда и никем еще не было вычислено (известен только приближенный результат). Во-вторых, если бы даже оно и было вычислено, то, чтобы напечатать его, понадобилось бы не менее тысячи таких книг, как эта, потому что число наше состоит из 369 693 061 цифры: набранное обыкновенным шрифтом, оно имело бы в длину 1000 км — от Ленинграда до Горького. Наконец, если бы меня снабдили достаточным количеством бумаги и чернил, я и тогда не мог бы удовлетворить ваше любопытство. Вы легко можете сообразить почему: если я способен писать, скажем, без перерыва по две цифры в секунду, то в час я напишу 7 200 цифр, а в сутки, работая непрерывно день и ночь, — не более 172 800 цифр. Отсюда следует, что, не отрываясь ни на секунду от пера, трудясь круглые сутки изо дня в день без отдыха, я просидел бы за работой не менее 7 лет, прежде чем написал бы это число...

Могу сообщить вам об этом числе только следующее: оно начинается цифрами 428 124 773 175 747 048 036 987 118

¹⁾ На языке математики такое выражение называется «третьей сверх-степенью девяти».

и кончается 89. Что находится между этим началом и концом, неизвестно ¹⁾). А ведь там 369 693 061 цифра!

Вы видите, что уже ч и с л о ц и ф р нашего результата невообразимо огромно. Как же велико само число, выражаемое этим длиннейшим рядом цифр? Трудно дать хотя бы приблизительное представление о его громадности, потому что такого множества вещей, считая даже каждый электрон за отдельную вещь, нет во всей вселенной!

Архимед вычислил некогда, сколько песчинок заключал бы в себе мир, если бы весь он, до неподвижных звезд, наполнен был тончайшим песком. У него получился результат, не превышающий единицы с 63 нулями. Наше число состоит не из 64, а из 370 м и л л и о н о в цифр, — следовательно, оно неизмеримо превышает огромное число Архимеда.

Познакомившись с этим замаскированным гигантом

$$9^{9^9},$$

обратимся к его противоположности.

Соответствующий числовой лилипут получится, если разделим единицу на это число. Будем иметь

$$\frac{1}{9^{9^9}},$$

что равно

$$\frac{1}{9^{387420489}}.$$

Мы имеем з д е с ь знакомое нам огромное число в знаменателе. Сверхвеликан превращен нами в сверхлилипута.

Необходимо сделать существенное замечание о великане из трех девяток. Я получил немало писем от читателей с утверждением, что выражение это вовсе не так трудно вы-

¹⁾ Начало числа вычислено с помощью логарифмов, конец определен по соображению.

числить; ряд читателей даже выполнил требуемый расчет, употребив на него сравнительно немного времени. Результат оказался несравненно скромнее того, о котором у меня рассказано. В самом деле, пишут они,

$$9^9 = 387\,420\,489;$$

возвысив же 387 420 489 в 9-ю степень, получаем число «все-го лишь» из 72-х цифр. Это хотя и не мало, но до 370 миллионов цифр от него еще очень далеко...

Читатели недоумевают, а между тем ошибка их в том, что ими неправильно понят смысл трехъярусного выражения из девяток. Они понимают его так:

$$(9^9)^9,$$

в то время как правильное его понимание иное:

$$9^{9^9}.$$

Отсюда — огромная разница в итогах вычисления.

Оба способа понимания приводят к одинаковому результату только в одном случае: когда мы имеем выражение

$$2^{2^2}$$

Тут безразлично, как вести вычисление: в обоих случаях получается один результат — 16.

Любопытно, что приведенное сейчас выражение вовсе не означает самого большого числа, какое можно изобразить тремя двойками. Можно получить гораздо большее число, если расположить двойки так:

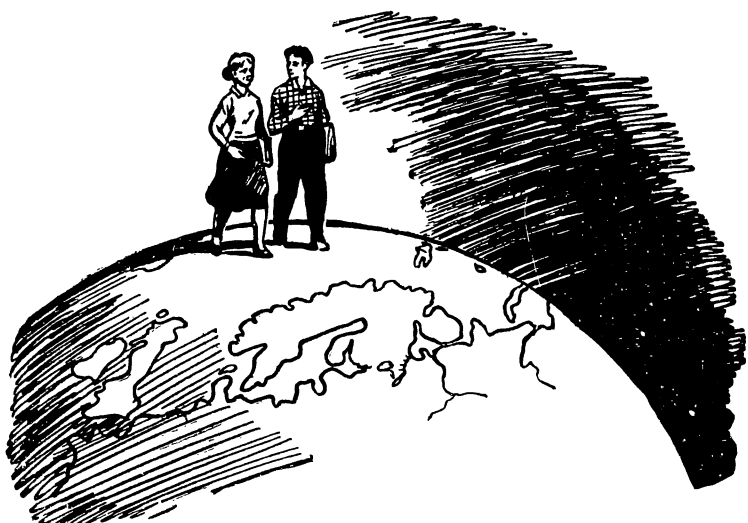
$$2^{2^{2^2}}.$$

Это выражение равно 4 194 304, т. е. значительно больше шестнадцати.

Как видите, трехъярусное расположение цифр не во всех случаях выражает наибольшее число, какое можно изобразить тремя одинаковыми цифрами. (Подробнее об этом говорится в «Занимательной алгебре», в гл. I: «Пятое математическое действие»).

Арифметические курьезы

$$\begin{array}{ll} 2 \times 2 = 2 + 2; & 11 \times 1,1 = 11 + 1,1; \\ 3 \times 1\frac{1}{2} = 3 + 1\frac{1}{2}; & 21 \times 1\frac{1}{20} = 21 + 1\frac{1}{20}. \end{array}$$



ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ПУТЕШЕСТВИЯ

ВАШЕ КРУГОСВЕТНОЕ ПУТЕШЕСТВИЕ

В молодости я работал в редакции одного распространенного ленинградского журнала, где состоял секретарем. Однажды мне подали визитную карточку посетителя. Я прочел на ней незнакомую фамилию и весьма необычное обозначение профессии: «первый русский кругосветный путешественник пешком». По обязанностям службы мне не раз доводилось беседовать с путешественниками по всем частям света и даже с кругосветными, но о «кругосветном путешественнике пешком» я еще не слышал. С любопытством поспешил я в приемную, чтобы познакомиться с этим неутоленным человеком.

Замечательный путешественник был молод и имел очень скромный вид. На вопрос, когда успел он совершить свое необыкновенное путешествие, «первый русский кругосветный и т. д.» объяснил мне, что оно именно теперь и

совершается. Маршрут? Шувалово — Ленинград ¹⁾; о дальнейшем он желает посоветоваться со мною... Из разговора выяснилось, что планы «первого русского и т. д.» довольно смутны, но во всяком случае не предусматривают оставления пределов России.

— Как же в таком случае совершите вы кругосветное путешествие? — с изумлением спросил я.

— Главное дело — длину земного обхвата пройти, это можно и в России сделать, — разрешил он мое недоумение. — Десять километров уже пройдено, и остается...

— Всего 39 990. Счастливого пути!

Не знаю, как странствовал «первый и т. д.» на протяжении остальной части своего пути. Но что он успешно выполнил свое намерение, я нисколько не сомневаюсь. Даже если он больше вовсе не странствовал, а сразу возвратился в родное Шувалово и безвыездно проживал там, он и в таком случае прошел не менее 40 тысяч км. Беда только, что он не первый и не единственный человек, совершивший такой подвиг. И вы, и я, и большинство других граждан нашего Союза имеют столько же прав называться «кругосветными путешественниками пешком» в понимании шуваловского ходока. Потому что каждый из нас, какой бы он ни был домосед, успел в течение своей жизни, сам того не подозревая, пройти пешком путь даже более длинный, чем окружность земного шара. Маленький арифметический подсчет убедит вас в этом.

В течение каждого дня вы, конечно, не менее 5 часов проводите на ногах: ходите по комнатам, по двору, по улице, словом, так или иначе шагаете. Если бы у вас в кармане был шагомер (прибор для подсчета сделанных шагов), он показал бы вам, что вы ежедневно делаете не менее 30 000 шагов. Но и без шагомера ясно, что расстояние, проходимое вами за день, очень внушительно. При самой медленной ходьбе человек делает в час 4 — 5 км. Это составляет в день за 5 часов 20 — 25 км. Теперь остается умножить дневной переход на 360, и мы узнаем, какой путь каждый из нас проходит в течение целого года:

$$20 \times 360 = 7200 \text{ или же } 25 \times 360 = 9000.$$

Итак, даже малоподвижный человек, никогда не покидавший родного города, проходит е ж е г о д н о пешком

¹⁾ Шувалово — небольшая станция в 10 км от Ленинграда.

около 8 000 км. А так как окружность земного шара имеет 40 000 км, то нетрудно вычислить, во сколько лет совершаем мы пешеходное путешествие, равное кругосветному:

$$40\,000:8000=5.$$

Значит, в течение 5 лет вы проходите путь, по длине равный окружности земного шара. Каждый 13-летний мальчик, если считать, что он начал ходить с двухлетнего возраста, дважды совершил уже «кругосветное путешествие». Каждый 25-летний человек выполнил не менее четырех таких путешествий. А дожив до 60 лет, мы десять раз обойдем вокруг земного шара, т. е. пройдем путь более длинный, чем от Земли до Луны (380 000 км).

Таков неожиданный результат подсчета столь обыденного явления, как ежедневная наша ходьба по комнате и вне дома.

ВАШЕ ВОСХОЖДЕНИЕ НА МОНБЛАН

Вот еще один интересный подсчет. Если вы спросите почтальона, ежедневно разносящего письма по адресатам, или квартирного врача, целый день занятого посещением пациентов, совершали ли они восхождение на Монблан, они, конечно, удивятся такому вопросу. Между тем вы легко можете доказать каждому из них, что, не будучи альпинистами, они наверное совершили уже восхождение на высоту, даже превышающую величайшую вершину Альп. Стоит только подсчитать, на сколько ступеней поднимается почтальон ежедневно, восходя по лестнице при разноске писем, или врач, посещая больных. Окажется, что самый скромный почтальон, самый занятой врач, никогда даже и не помышлявшие о спортивных состязаниях, побивают мировые рекорды горных восхождений. Подсчитайте это.

Возьмем для подсчета довольно скромные средние цифры; допустим, что почтальон ежедневно посещает только десять человек, живущих кто на втором этаже, кто на третьем, четвертом, пятом — в среднем возьмем на третьем. Высоту третьего этажа примем, для круглого числа, в 10 м; следовательно, наш почтальон ежедневно совершает по ступеням лестниц путешествие на высоту $10 \times 10 = 100$ м. Высота Монблана 4800 м. Разделив ее на 100, вы узнаете, что наш скромный почтальон выполняет восхождение на Монблан в 48 дней...

Итак, каждые 48 дней, или примерно 8 раз в год, почтальон поднимается по лестницам на высоту, равную высочайшей вершине Европы. Скажите, какой спортсмен ежегодно по 8 раз взбирается на Монблан?



Рис. 59. Почтальон в течение года 8 раз поднимается на высоту самых больших гор в Европе.

Для врача у меня имеются не предположительные, а реальные цифры. Врачи квартирной помощи в Ленинграде подсчитали, что в среднем каждый из них за свой рабочий день поднимается к больным на 2500 ступеней. Считая высоту ступеньки равной 15 см и принимая 300 рабочих дней в году, получаем, что за год врач поднимается на 112 км, т. е. совершает 20 раз восхождение на высоту Монблана.

Не надо непременно быть почтальоном или врачом, чтобы выполнять подобные подвиги, конечно, того не ведая. Я живу на втором этаже, в квартире, куда ведет лестница с 20 ступеньками — число, казалось бы, весьма скромное. Ежедневно мне приходится взбегать по этой лестнице раз 5, да еще посещать две квартиры, расположенные, скажем, на такой же высоте. В среднем можно принять, что я поднимаюсь ежедневно 7 раз по лестнице с 20 ступенями, т. е. взбегаю вверх каждый день на 140 ступеней. Сколько же это составит в течение года?

$$140 \times 360 = 50\,400.$$

Итак, ежегодно я поднимаюсь более чем на 50 000 ступеней. В 60 лет я успею подняться на вершину сказочно высокой лестницы в три миллиона ступеней (450 км)! Как

изумился бы я, если бы ребенком меня подвели к основанию этой лестницы, уходящей в бесконечную даль, и сказали, что некогда я, быть может, достигну ее вершины... На какие же исполинские высоты взбираются те люди, которые по роду своей профессии только и делают, что поднимаются на высоту, например лифтерши?

Мы с гордостью узнаем, что среди наших летчиков есть такие, которые успели налетать не только число километров, равное расстоянию от Земли до Луны, но даже во много раз перекрыли это расстояние.

НЕЗАМЕТНОЕ ПУТЕШЕСТВИЕ НА ДНО ОКЕАНА

Весьма внушительные путешествия выполняют обитатели подвальных помещений, служащие таких же складов и т. п. Много раз в день сбегая вниз по ступенькам маленькой лестницы, ведущей в подвал, они в течение нескольких месяцев проходят расстояние в целые километры. Нетрудно рассчитать, во сколько времени служащий подвального склада проходит таким образом вниз расстояние, равное глубине океана. Если лестница углубляется, скажем, всего на 2 м и человек сбегает по ней ежедневно только 10 раз, то в месяц он пройдет вниз расстояние в $30 \times 20 = 600$ м, а в год $600 \times 12 = 7200$ м — более 7 км. Вспомним, что глубочайшая шахта простирается в недра Земли всего на два с небольшим километра!



Рис. 60. Работник подвального склада ежегодно спускается до дна океана.

Итак, если бы с поверхности океана вела на его дно лестница, то любой работник подвального торгового помещения достиг бы дна океана в течение одного года.

ТРАКТОР ВОКРУГ СВЕТА

Каждый трактор работает на социалистических полях наших колхозов и совхозов около 2500 часов ежегодно. Средним числом он проходит в час 5 км. Годовой путь его, следовательно, составляет

$$5 \times 2500 = 12\,500 \text{ км.}$$

Легко подсчитать, во сколько лет прокладывает трактор путь, равный окружности земного шара:

$$40\,000 : 12\,500 = 3,2.$$

В течение только пяти лет трактор, сейчас работающий в СССР, успеет раза полтора совершить «кругосветное путешествие».

В этом отношении он обгоняет каждого из нас, незаметно совершающего в 5 лет только одно «кругосветное путешествие», но зато уступает своему собрату-паровозу (товарному), который успевает на железных дорогах нашего Союза проделать «кругосветный» пробег всего лишь за 8 месяцев (пассажирский — даже за 6 месяцев).

НЕУТОМИМОЕ КОЛЕСИКО

Кругосветный путешественник имеется и у многих из нас — внутри наручных или карманных часов. От-

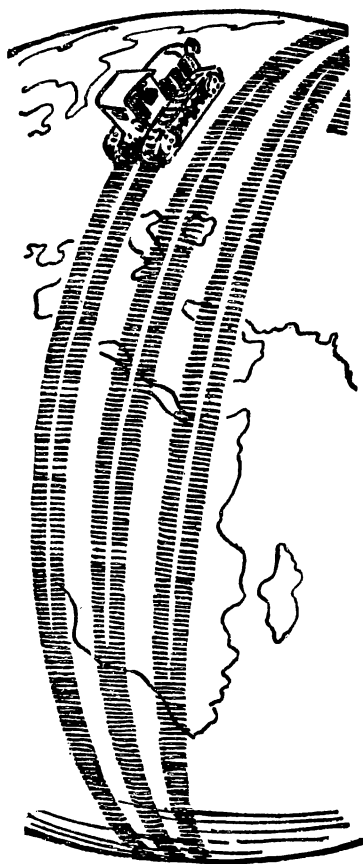


Рис. 61. Трактор за десятилетие работы трижды обходит вокруг земного шара.

кройте заднюю крышку часов и рассмотрите механизм. Все зубчатые его колеса так медленно вертятся, что с первого взгляда кажутся даже и вовсе неподвижными. Надо долго и внимательно следить за колесиками, чтобы заметить их движение. Исключение составляет только крошечный маховик — так называемый балансир, который без устали качается взад и вперед. Движения его так проворны, что трудно сосчитать, сколько качаний успевает он сделать в одну секунду. Пять раз поворачивается он в течение каждой секунды то в одну, то в другую сторону попеременно. При этом колесико делает каждый раз один полный оборот и еще пятую долю.

Попробуем сосчитать, сколько оборотов делает оно в течение целого года; ведь в руках аккуратного человека часы никогда не останавливаются: он не забывает их вовремя заводить. Каждую минуту колесико делает $5 \times 60 = 300$ качаний, а каждый час $300 \times 60 = 18\,000$. В сутки это составляет $18\,000 \times 24 = 432\,000$ качаний. Считая в году для круглого числа 360 дней, имеем, что ежегодно балансир делает

$$432\,000 \times 360 = 155\,520\,000 \text{ качаний.}$$

Но было уже сказано, что балансир поворачивается при одном качании на $1 \frac{1}{5}$ полного оборота. Значит, в течение года он успевает обернуться вокруг своей оси

$$155\,520\,000 \times 1 \frac{1}{5} = 186\,624\,000 \text{ раз,}$$

круглым счетом 187 миллионов раз!

Уже одно это огромное число достаточно удивительно. Вы поразитесь еще более, если сделаете другой расчет: вычислите, какой путь прошел бы автомобиль, если бы колеса его обернулись 187 миллионов раз. Поперечник автомобильного колеса 80 см; значит, окружность его — около 250 см, или $2 \frac{1}{2}$ м. Умножив $2 \frac{1}{2}$ на 187 миллионов, получим длину пути, которую мы желаем знать: около 470 000 км.

Следовательно, автомобиль, будь его колеса так же неумоимы, как балансир карманных часов, более чем 10 раз обходил бы ежегодно земной шар, или, если хотите, пробегал бы путь больший, чем от нас до Луны! Нетрудно представить себе, сколько раз понадобилось бы во время такого путешествия чинить всю машину и менять колеса

автомобиля. А между тем маленькое колесико карманных часов неумоимо движется по целым годам без починки, без новой смазки, без смены и работает притом с изумительной точностью...

ПУТЕШЕСТВУЮЩИЕ, СТОЯ НА МЕСТЕ

Последние строки книги мне хочется посвятить ее *первым* читателям, без деятельного сотрудничества которых она не могла бы появиться в свет. Я говорю, конечно, о наборщиках. Они также совершают далекие арифметические путешествия, не выходя из пределов наборной, даже стоя неподвижно у наборных касс. Проворная рука труженика «свинцовой армии», скользя ежесекундно от кассы к верстатке, проходит за год огромное расстояние. Сделайте подсчет. Вот данные: наборщик набирает в течение рабочего дня 12 000 букв и для каждой буквы должен переместить руку туда и назад на расстояние в среднем около полуметра. В году считайте 300 рабочих дней. Следовательно, имеем

$$2 \times 0,5 \times 12\,000 \times 300 = 3\,600\,000 \text{ м, т. е. } 3600 \text{ км.}$$

Значит, за 11 лет работы даже и наборщик, не отрывающийся от кассы, совершает кругосветное путешествие. «Неподвижный кругосветный путешественник!» Это звучит куда оригинальнее, чем «кругосветный путешественник пешком».

Не найдется человека, который так или иначе не совершил бы в этом смысле кругосветного путешествия. Можно сказать, что замечательным человеком является не тот, кто проделал кругосветное путешествие, а тот, кто его не совершил. И если кто-нибудь станет уверять вас, что он этого не сделал, вы, надеюсь, сможете «математически» доказать ему, что он не составляет исключения из общего правила.

Арифметические курьезы

$$\begin{array}{l} 1 \times \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \\ 6 \times \frac{6}{7} = 6 - \frac{6}{7}; \quad \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}. \end{array}$$

ОТВЕТЫ

К стр. 29.

К ребусу № 1 — *экспертиза*.

К ребусу № 2 — *республика*.

К стр. 68.

1. «1146». 2. НН, где через Н обозначена «цифра» 13.

К стр. 71

3. «1304». 4. «1144». 5. «2402». 6. «2010». 7. «10210». 8. «110». 9. «10», остаток «11».

К стр. 77.

10. По восьмеричной. 11. По шестеричной. 1. Число «сто тридцать» в различных системах счисления выражается следующим образом:

в двоичной «10 000 010», в шестеричной «334»,
в троичной «11 211», в семеричной «244»,
в четверичной «2002», в восьмеричной «202»,
в пятеричной «1010», в девятеричной «154».

13. По четверичной системе «27»; по пятеричной «38»; по шестеричной «51»; по семеричной «66»; по восьмеричной «83»; по девятеричной «102». Число это не может быть написано ни по двоичной, ни по троичной системе, так как содержит цифру 3, которой в этих системах нет. Число это по пятеричной системе делится на 2, так как сумма его цифр делится на 2; по семеричной системе оно делится на 6, а по девятеричной не делится на 4.

Яков Исидорович Перельман.
Занимательная арифметика.

Редактор *А. Э. Рывкин.*
Рисунки в тексте работы
художника *К. В. Безбородова.*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно.*
Корректор *Т. С. Плетнева.*

Сдано в набор 9/IX 1959 г. Подписано к печати
27/XI 1959 г. Бумага $84 \times 108^{1/32}$. Физ. печ. л. 6.
Усл. печ. л. 9,84 Уч.-изд. л. 8,95. Тираж 175 000 экз.
Т-11077. Цена книги 2 р. 70 к. Заказ № 3537.

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Первая Образцовая типография имени
А. А. Жданова Московского городского
Совнархоза. Москва, Ж-54, Валовая, 28.

Scan - AAW
Djvu - Joker2156

2 р. 70 к.

ФИЗМАТГИЗ 1959